

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
(2)	オ	カ	キ	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{18}$	
(3)	ク	ケ	コ	
	54	16	-160	

【解説】

(1)

円 C の式を変形すると、

$$\begin{aligned}x^2+y^2-y&=0 \\ \Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。したがって、円 C の中心は $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 、半径は $\frac{1}{2}$ である。円 C と直線 $y=-x+1$ の共有点の x 座標を求めると、

$$\begin{aligned}x^2+(-x+1)^2-(-x+1)&=0 \\ \Leftrightarrow 2x^2-x&=0 \\ \Leftrightarrow x(2x-1)&=0 \\ \therefore x&=0, \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。 $x=0$ のとき $y=1$ 、 $x=\frac{1}{2}$ のとき $y=\frac{1}{2}$ であるから、 $A(0, 1)$ 、 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ とおける。AB の中点 $M(X, Y)$ を求めると、

$$\begin{aligned}X&=\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4} \\ Y&=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

より $M\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ となる。また、AB の長さは、

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} \\ &=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} \\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

となる。

(2)

組 (X, Y) は全てで $6^2=36$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こるので、 $\frac{X}{Y}$ の値を X, Y の取りうる値ごとに表に表すと、以下のようになる。

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{6}{5}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1

表より、 $\frac{X}{Y}=1$ を満たす確率は $\frac{1}{6}$ となる。また、 $\frac{X}{Y}>1$ を満たす確率は $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$ となる。 $\frac{X}{Y}$ が整数となる確率は $\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$ となる。

(3)

$(x-3y)^4$ を展開すると、

$$(x-3y)^4=x^4-12x^3y+54x^2y^2-108xy^3+81y^2$$

となる。 x^2y^2 の係数は 54 であり、係数の和は $1-12+54-108+81=16$ となる。

$\left(\sqrt{6}x-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}x}\right)^6$ を展開した時の一般項は ${}_6C_n\left(\sqrt{6}x\right)^n\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}x}\right)^{6-n}$ であるから、定数項になるのは $n=3$ のときである。このとき、定数項は

$$\begin{aligned}{}_6C_3\left(\sqrt{6}x\right)^3\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}x}\right)^3&=20\cdot6\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right) \\ &=-160\end{aligned}$$

となる。

【2】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ					
(1)	8	4	2^{n-1}	2^{n-2}	$\frac{2^n-1}{2}$	2^{n-1}	11					
(2)	ク	ケ										
	$2^n-\frac{1}{2^n}$	$2^{n+1}+\frac{1}{2^n}-3$										
(3)	コ											
	$\frac{3}{2}$											

【解説】

(1)

第4群の分母は $2^4=16$ であるから、16未満の奇数の数を考えると、8つである。第4群の全ての項の和は、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^8 \frac{2k-1}{16} &= \frac{1}{16} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 - 8 \right) \\ &= \frac{64}{16} \\ &= 4\end{aligned}$$

となる。第 n 群の分子は $1, 3, 5, \dots, 2^n-1$ であるから、 2^n 未満の奇数の数を考えると、 2^n までの整数のうちの半分なので、 2^{n-1} 個の項からなることが言える。第 n 群の総和を求めると、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2k-1}{2^n} &= \frac{1}{2^n} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \cdot (2^{n-1}+1) - 2^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot 2^{2n-2} \\ &= 2^{n-2}\end{aligned}$$

となる。したがって S_n を求めると、

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n 2^{k-2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n-1}{2-1} \\ &= \frac{2^n-1}{2}\end{aligned}$$

となる。

$n \geq 2$ のとき、第 n 群の最初の項のこの数列全体における順番は、第 $n-1$ 群までの項数の総和に1を足して、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} + 1 &= \frac{2^{n-1}-1}{2-1} + 1 \\ &= 2^{n-1} - 1 + 1 \\ &= 2^{n-1}\end{aligned}$$

となる。 $n=1$ のとき $2^{n-1}=1$ であるから、全ての自然数 n について、第 n 群の最初の項は個の数列全体の第 2^{n-1} 項である。これより、 $2^{10} \leq 2018 < 2^{11}$ であることから、第2018項は第11群にあると言える。

(2)

はじめに、 T_n を求めると、

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{(2k-1)^2}{2^{2n}} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (4k^2 - 4k + 1) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2^{n-1} (2^{n-1}+1) (2^n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} (2^{n-1}+1) + 2^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} (2^{n-1}+1) \left(\frac{2^n-2}{3} \right) + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2}{3} (2^{n-1}+1) (2^{n-1}-1) + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^n} (2^{2n-2}-1) + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{6} \left(2^n - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{3}{2^n} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(2^n - \frac{1}{2^n} \right)\end{aligned}$$

となる。 U_n は、 T_k を $k=1$ から $k=n$ まで足したものだから、

$$\begin{aligned}U_n &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left(2^k - \frac{1}{2^k} \right) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{2(2^n-1)}{2-1} - \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)}{1 - \frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left(2^{n+1} - 2 + \frac{1}{2^n} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(2^{n+1} + \frac{1}{2^n} - 3 \right)\end{aligned}$$

となる。

(3)

$$S_n = \frac{2^n-1}{2}, U_n = \frac{1}{6} \left(2^{n+1} + \frac{1}{2^n} - 3 \right) \text{より,}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{U_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-1}{2} \cdot \frac{6}{2^{n+1} + \frac{1}{2^n} - 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{2^n-1}{2^{n+1} + \frac{1}{2^n} - 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{2 + \frac{1}{2^{2n}} - \frac{3}{2^n}} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。

[3]

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	2	4	$\frac{5}{6}\pi$	4
(2)	オ	カ	キ	
	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$	
(3)	ク	ケ	コ	
	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{16}\pi^2 + \frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{4}\pi^2 - 2\pi$	

【解説】

(1)

$f(x) = (1 + \sin x)\cos x$ より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 + \sin x)' \cos x + (1 + \sin x)(\cos x)' \\ &= \cos^2 x + (1 + \sin x)(-\sin x) \\ &= (1 - \sin^2 x) + (1 + \sin x)(-\sin x) \\ &= (1 + \sin x)(1 - \sin x) + (1 + \sin x)(-\sin x) \\ &= (1 + \sin x)(1 - 2\sin x) \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} f''(x) &= (1 + \sin x)'(1 - 2\sin x) + (1 + \sin x)(1 - 2\sin x)' \\ &= \cos x(1 - 2\sin x) + (1 + \sin x)(-2\cos x) \\ &= -\cos x(-1 + 2\sin x + 2 + 2\sin x) \\ &= -\cos x(1 + 4\sin x) \end{aligned}$$

となる。

$0 < x < 2\pi$ において $f'(x) = 0$ となるときの x の値を求めると,

$$(1 + \sin x)(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1, \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

となる。 $0 < x < 2\pi$ における $f(x)$ の増減表を書くと、以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\nearrow$	

増減表より、 $f(x)$ は $x = \frac{5}{6}\pi$ のときに極小値をとる。また、 $f''(x) = 0$ となるとき、 $\cos x = 0$ または $\sin x = -\frac{1}{4}$ である。 $0 < x < 2\pi$ においてこれらを満たす x はそれぞれ2つずつあり、それらの前後で $f''(x)$ の符号が変わるので、変曲点は4個存在する。

(2)

$\int \sin x \cos x dx$ は、2倍角の公式を用いて

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \int \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (-\cos 2x) + C_1 \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 \end{aligned}$$

となる。 $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ は、2倍角の公式と半角の公式を用いて

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \frac{1}{4} \sin^2 2x dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + C_2 \\ &= \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C_2 \end{aligned}$$

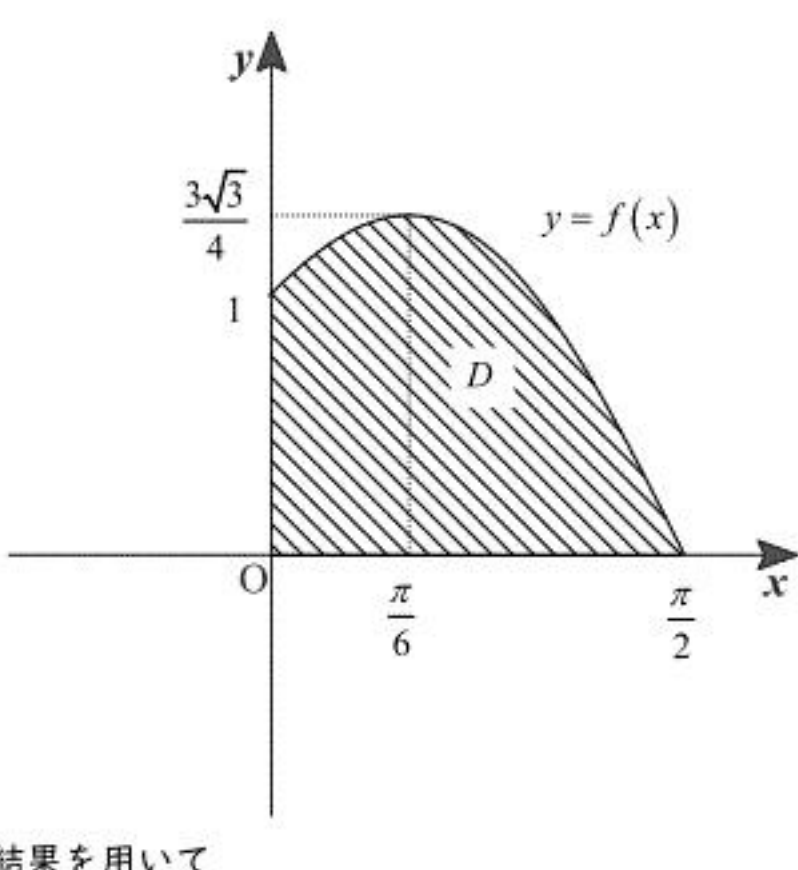
と求められる。 $\int x \sin x \cos x dx$ は、上の結果を用いて部分積分法により

$$\begin{aligned} \int x \sin x \cos x dx &= \int \frac{x}{2} \sin 2x dx \\ &= \int \frac{x}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= -\frac{x}{4} \cos 2x - \int \left(-\frac{1}{4} \cos 2x \right) dx \\ &= -\frac{x}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C_3 \\ &= -\frac{x}{4} \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C_3 \end{aligned}$$

と求められる。

(3)

領域 D を図示すると以下のようになる。



以上の図より、(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx \\ &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。 V は D を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積だから、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)^2 \cos^2 x dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x \sin^2 x + 2\sin x \cos^2 x + \cos^2 x) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 x)(\cos x)' dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi \left[-\frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{2}{3} \pi + \frac{\pi^2}{4} \\ &= \frac{5}{16} \pi^2 + \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。また、 $0 \leq x_1 \leq \frac{\pi}{6}$ 、 $\frac{\pi}{6} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ として、 $y_1 = f(x_1)$ 、 $y_2 = f(x_2)$ とおくと、 W は

$$W = \pi \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} x_2^2 dy_2 - \pi \int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} x_1^2 dy_1$$

と表せる。 $y = (1 + \sin x)\cos x$ より、 $\frac{dy}{dx} = (1 + \sin x)(1 - 2\sin x)$ であり、積分範囲はそれぞれ以下のように対応する。

y_1	1	$\rightarrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$
x_1	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{6}$
y_2	0	$\rightarrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$
x_2	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{6}$

したがって、

$$\begin{aligned} W &= \pi \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} x_2^2 dy_2 - \pi \int_1^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} x_1^2 dy_1 \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} x_2^2 \cdot \frac{dy_2}{dx_2} dx_2 - \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} x_1^2 \cdot \frac{dy_1}{dx_1} dx_1 \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} x_2^2 f'(x_2) dx_2 - \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} x_1^2 f'(x_1) dx_1 \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} x_2^2 f'(x_2) dx_2 + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^0 x_1^2 f'(x_1) dx_1 \\ &= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 f'(x) dx \\ &= -\pi \left[x^2 f(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2xf'(x) dx \\ &= -\pi \left[x^2 (1 + \sin x) \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x(1 + \sin x) \cos x dx \\ &= 0 + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos x dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\sin x)' dx + 2\pi \left[-\frac{x}{4} \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + 2\pi \cdot \frac{\pi}{8} \\ &= 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} - 2\pi [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi^2}{4} \\ &= \frac{5}{4} \pi^2 - 2\pi \end{aligned}$$

となる。

