

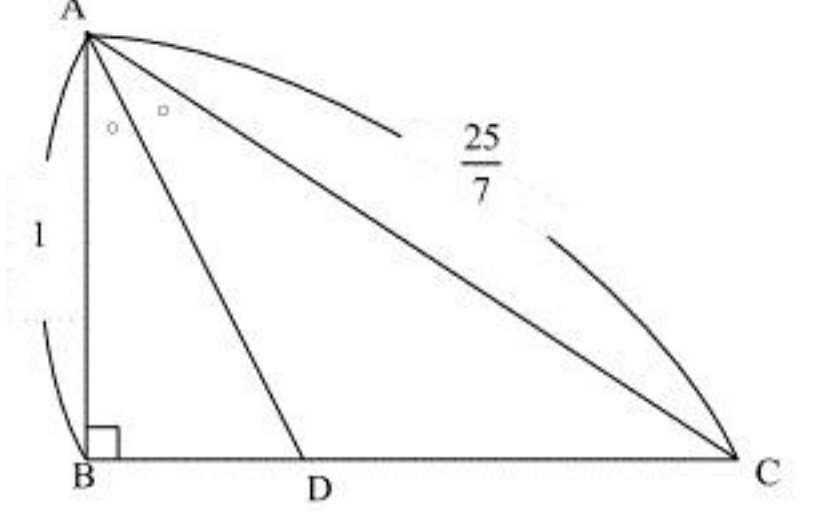
【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{75}{28}$	$\frac{125}{56}$	$\frac{18}{7}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{200}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{27}{80}$

【解説】

(1)



$\angle ABC = 90^\circ$ であるから、

$$\cos \angle BAC = \frac{AB}{AC}$$

$$= \frac{7}{25}$$

である。また、 $0^\circ < \angle CAD < 90^\circ$ より、 $\cos \angle CAD > 0$ であるから、 $\angle BAD = \angle CAD$ より、半角の公式を用いると

$$\begin{aligned}\cos \angle CAD &= \sqrt{\frac{1 + \cos 2\angle CAD}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \cos \angle BAC}{2}} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

を得る。三平方の定理より、

$$\begin{aligned}BC &= \sqrt{\left(\frac{25}{7}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{24}{7}\end{aligned}$$

であるから、角の二等分線の性質より

$$\begin{aligned}BD &= BC \cdot \frac{AB}{AB + AC} \\ &= \frac{24}{7} \cdot \frac{1}{1 + \frac{25}{7}} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CD &= BC \cdot \frac{AC}{AB + AC} \\ &= \frac{24}{7} \cdot \frac{\frac{25}{7}}{1 + \frac{25}{7}} \\ &= \frac{75}{28}\end{aligned}$$

となる。また $\triangle ACD$ の外接円 K の半径 R について、正弦定理より

$$\frac{CD}{\sin \angle DAC} = 2R$$

であるから、

$$\begin{aligned}R &= \frac{CD}{2\sqrt{1 - \cos^2 \angle DAC}} \quad (\because \sin \angle DAC > 0) \\ &= \frac{75}{56} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}} \\ &= \frac{75}{56} \cdot \frac{5}{3} \\ &= \frac{128}{56}\end{aligned}$$

となる。方べきの定理より、

$$BE \cdot BA = BD \cdot BC$$

であるから、

$$\begin{aligned}BE &= \frac{BD \cdot BC}{BA} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{24}{7} \\ &= \frac{18}{7}\end{aligned}$$

となる。

(2)

まず、1回目に赤玉を取り出す確率を求める。箱Aから赤玉を取り出す確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$ であり、

箱Bから赤玉を取り出す確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$ である。これらの事象は互いに排反であるから、1回目

に赤玉を取り出す確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

となる。また、1回目に取り出した玉が赤であったとき、それが箱Aから取り出されたものである条件つき確率は

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4}$$

である。次に1回目と2回目ともに赤玉を取り出す確率について考える。箱Aには赤玉が1個しか入っていないので、1回目と2回目ともに赤玉を取り出すのは以下のような場合に分けられる。

[1] 1回目は箱Aから赤玉を取り出し、2回目は箱Bから赤玉を取り出す。

[2] 1回目は箱Bから赤玉を取り出し、2回目は箱Aから赤玉を取り出す。

[3] 1回目、2回目ともに箱Bから赤玉を取り出す。

[1]の事象が起こる確率は、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{100}$ であり、[2]の事象が起こる確率は[1]の事象が起こる確率に等しい。また[3]の事象が起こる確率は、取り出した玉を元に戻さないことに注意し

て、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{40}$ と求められる。[1]~[3]の事象は互いに排反であるから、1回目と2回目と

ともに赤玉を取り出す確率は、

$$\frac{3}{100} \cdot 2 + \frac{3}{40} = \frac{27}{200}$$

となる。また2回目に赤玉を取り出す事象について考える。このような事象は以下の場合に分けられる。

[4] 1回目に白玉を取り出し、2回目に赤玉を取り出す。

[5] 1回目、2回目ともに赤玉を取り出す。

[4]の事象が起こる確率について考える。この事象はさらに以下のような場合に分けられる。

[4-1] 1回目に箱Aから白玉を取り出し、2回目に箱Aから赤玉を取り出す。

[4-2] 1回目に箱Aから白玉を取り出し、2回目に箱Bから赤玉を取り出す。

[4-3] 1回目に箱Bから白玉を取り出し、2回目に箱Aから赤玉を取り出す。

[4-4] 1回目に箱Bから白玉を取り出し、2回目に箱Bから赤玉を取り出す。

[4-1]~[4-4]の確率はそれぞれ、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

であり、これらの事象は互いに排反であるから、[4]の起こる確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{53}{200}$$

となる。[5]の起こる確率は先ほど求めた通り $\frac{27}{200}$ であるので、2回目に取り出す玉が赤である確率は、

$$\frac{53}{200} + \frac{27}{200} = \frac{2}{5}$$

となる。2回目に取り出した玉が赤かつ、1回目に取り出した玉が赤であるという事象の起こる確率は、[5]の起こる確率で $\frac{27}{200}$ である。したがって、2回目に取り出した玉が赤であっ

たとき、1回目に取り出した玉も赤である条件付き確率は

$$\frac{\frac{27}{200}}{\frac{2}{5}} = \frac{27}{80}$$

である。

【2】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	1	$2+\sqrt{10}$	$\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}, 2+\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$	$2-2\sqrt{10}$	$\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}, 2-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	$\frac{6}{5}\vec{c}+\frac{3}{5}\vec{d}$	$\frac{2}{5}\vec{c}+\frac{6}{5}\vec{d}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{2\sqrt{31}}{5}$	$\frac{3\sqrt{3}}{5}$

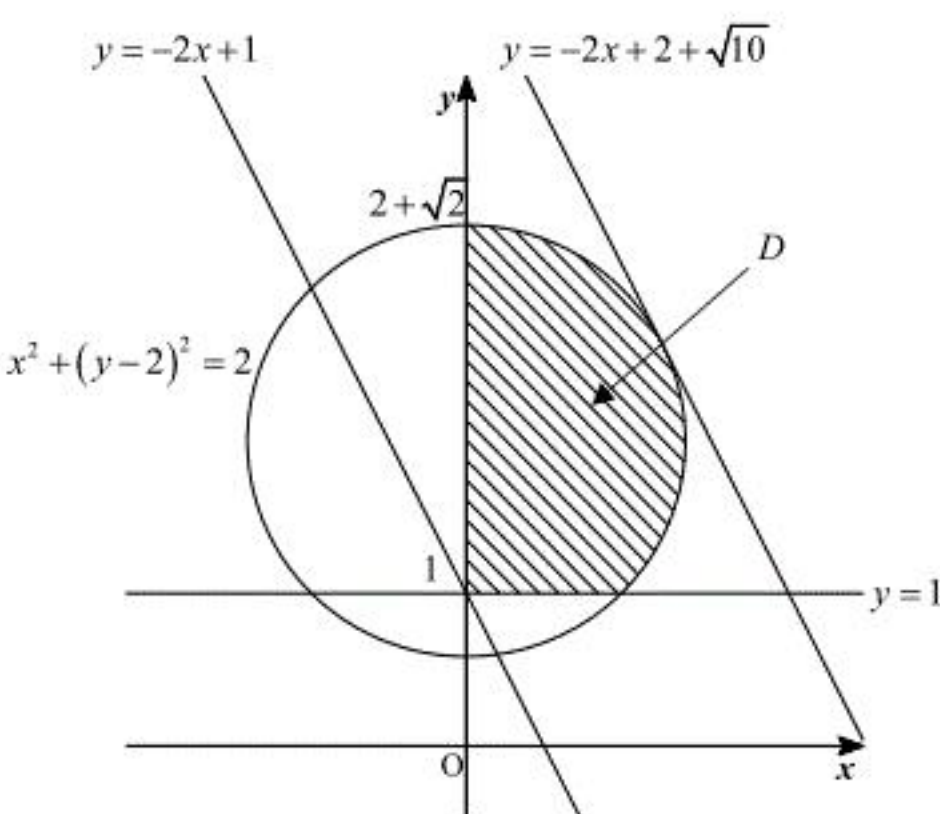
【解説】

(1)

$$x^2+y^2\leq 4y-2$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2\leq 2$$

であるから、領域 D を図示すると以下のようになる。(ただし、境界を含む。)



ここで、

$$2x+y=k \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおくと①は傾き -2 、 y 切片 k の直線を表す。したがって、この直線と領域 D が共有点を

持つような k の最大値、最小値を求めればよい。図より、 k が最小となるのは、①が点 $(0, 1)$

を通るときであり、このとき $k=1$ である。また、 k が最大となるのは、①と円

$x^2+(y-2)^2=2$ が第1象限において接するときであり、このとき、円の中心 $(0, 2)$ と直線①と

の距離が円の半径 $\sqrt{2}$ に等しいので、

$$\begin{aligned} \frac{|2\cdot 0+2-k|}{\sqrt{2^2+1^2}} &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow |k-2| &= \sqrt{10} \\ \therefore k &= 2+\sqrt{10} \ (\because k>0) \end{aligned}$$

となる。このときの点 P の x 座標について考える。 $x^2+(y-2)^2=2$ と $y=-2x+2+\sqrt{10}$ から

y を消去して

$$\begin{aligned} x^2+(-2x+\sqrt{10})^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow \left(x-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

であるから、点 P の x 座標は $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ となる。したがって、点 P の座標は $P\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}, 2+\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ で

ある。次に、 $x^2+y^2-4x-2y=l$ の最小値について考える。

$$x^2+y^2-4x-2y=l \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x-2y &= l \\ \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 &= l+5 \end{aligned}$$

より、②は点 $(2, 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{l+5}$ の円を表す。したがって、この円が領域 D と共

有点をもつような l の最小値を求めればよい。いま、 $2^2+(1-2)^2>2$ より、点 $(2, 1)$ は円

$x^2+(y-2)^2=2$ の外部にある。また、②と円 $x^2+(y-2)^2=2$ の中心を結んだ線分と円

$x^2+(y-2)^2=2$ との交点は $x\geq 0$ 、 $y\geq 1$ の範囲に存在するので、この交点は D 上の点であ

る。以上を踏まえると、 l が最小となるのは、②と円 $x^2+(y-2)^2=2$ が外接するときであ

る。このとき、2つの円の中心間距離と半径の和が等しいことから、 $l+5\geq 0$ において、

$$\begin{aligned} \sqrt{(0-2)^2+(1-2)^2} &= \sqrt{l+5}+\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow l+5 &= (\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 \\ \therefore l &= 2-2\sqrt{10} \end{aligned}$$

となり、求める $x^2+y^2-4x-2y$ の最小値は、 $2-2\sqrt{10}$ である。このとき、点 P は2つの円の

中心を通る直線 $y=-\frac{1}{2}x+2$ と円 $x^2+(y-2)^2=2$ の共有点であるから、点 P の x 座標は、2

式から y を消去して、

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{4}x^2 &= 2 \\ \therefore x &= \frac{2\sqrt{10}}{5} \ (\because x>0) \end{aligned}$$

となる。したがって点 P の x 座標は、 $P\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}, 2-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ となる。

(2)

$\overrightarrow{\text{MA}}=\vec{c}$ 、 $\overrightarrow{\text{LB}}=\vec{d}$ より、

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{\text{OA}}-\overrightarrow{\text{OM}}=\vec{c} \\ \overrightarrow{\text{OB}}-\overrightarrow{\text{OL}}=\vec{d} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}=\vec{c} \\ \vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}=\vec{d} \end{cases} \\ \therefore \vec{a}=\frac{6}{5}\vec{c}+\frac{3}{5}\vec{d}, \vec{b}=\frac{2}{5}\vec{c}+\frac{6}{5}\vec{d} \end{aligned}$$

を得る。 $\text{MA}=1$ 、 $\text{LB}=2$ 、 $\angle\text{AEB}=\frac{2}{3}\pi$ のとき $|\vec{c}|=1$ 、 $|\vec{d}|=2$ 、 $\vec{c}\cdot\vec{d}=1\cdot 2\cdot\cos\angle\text{AEB}=-1$ であること

に注意すると、

$$\begin{aligned} \text{OA} &= |\vec{a}| \\ &= \sqrt{\left(\frac{6}{5}\vec{c}+\frac{3}{5}\vec{d}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\vec{c}+\frac{3}{5}\vec{d}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{36}{25}|\vec{c}|^2+\frac{36}{25}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{9}{25}|\vec{d}|^2} \\ &= \sqrt{\frac{36}{25}+\frac{36}{25}\cdot(-1)+\frac{9}{25}\cdot 4} \\ &= \frac{6}{5} \ (\because \text{OA}>0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{OB} &= |\vec{b}| \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{5}\vec{c}+\frac{6}{5}\vec{d}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\vec{c}+\frac{6}{5}\vec{d}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{4}{25}|\vec{c}|^2+\frac{24}{25}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{36}{25}|\vec{d}|^2} \\ &= \sqrt{\frac{4}{25}+\frac{24}{25}\cdot(-1)+\frac{36}{25}\cdot 4} \\ &= \frac{2\sqrt{31}}{5} \ (\because \text{OB}>0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= \left(\frac{6}{5}\vec{c}+\frac{3}{5}\vec{d}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\vec{c}+\frac{6}{5}\vec{d}\right) \\ &= \frac{12}{25}|\vec{c}|^2+\frac{42}{25}\vec{c}\cdot\vec{d}+\frac{18}{25}|\vec{d}|^2 \\ &= \frac{12}{25}+\frac{42}{25}\cdot(-1)+\frac{18}{25}\cdot 4 \\ &= \frac{42}{25} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle\text{OAB}$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{36}{25}\cdot\frac{124}{25}-\left(\frac{42}{25}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2700}{25^2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

となる。

【3】

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^3 + 6x^2 - 9x + 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow -(x-5)(x^2 - x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $x^2 - x + 4 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ より、求める実数解は $x = 5$ である。

(答) $x = 5$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= 16 \\ \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)(x-1)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 1, 4 \end{aligned}$$

となるから、求める実数解は $x = 1, 4$ である。

(答) $x = 1, 4$

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 12x - 9 \\ &= -3(x^2 - 4x + 3) \\ &= -3(x-3)(x-1) \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

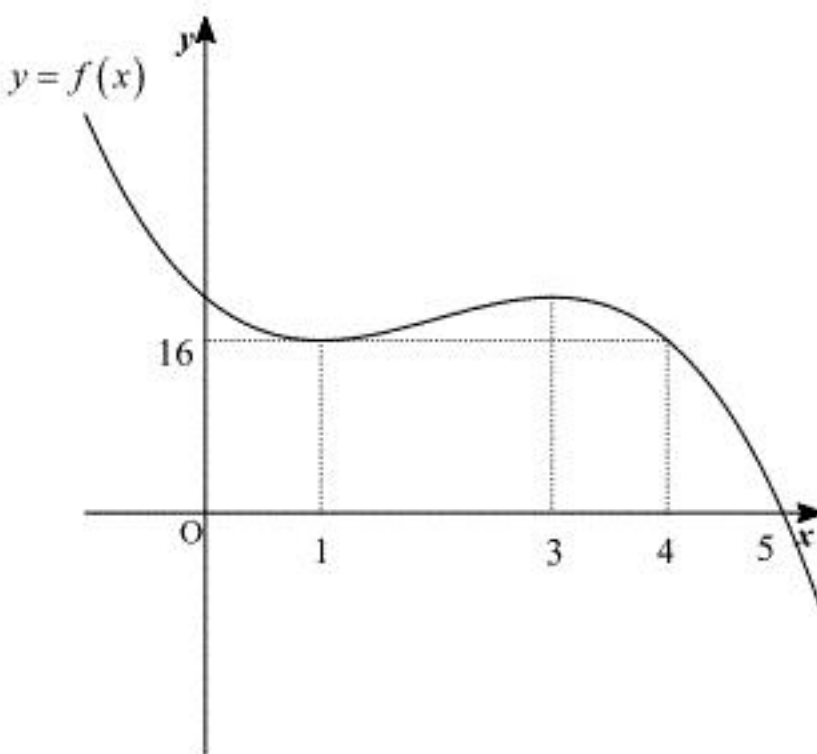
x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	16	$\nearrow$	20	$\searrow$

したがって、 $f(x)$ は $x=1$ で極小値 16、 $x=3$ で極大値 20 をとる。

(答) 増減表: 上表、極小値: 16、極大値: 20

(4)

t の値で場合分けして考える。(1), (2) 及び、(3) の結果より、 $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



上図より、 $0 \leq x \leq t$ における $y = f(x)$ の最小値 $g(t)$ は、

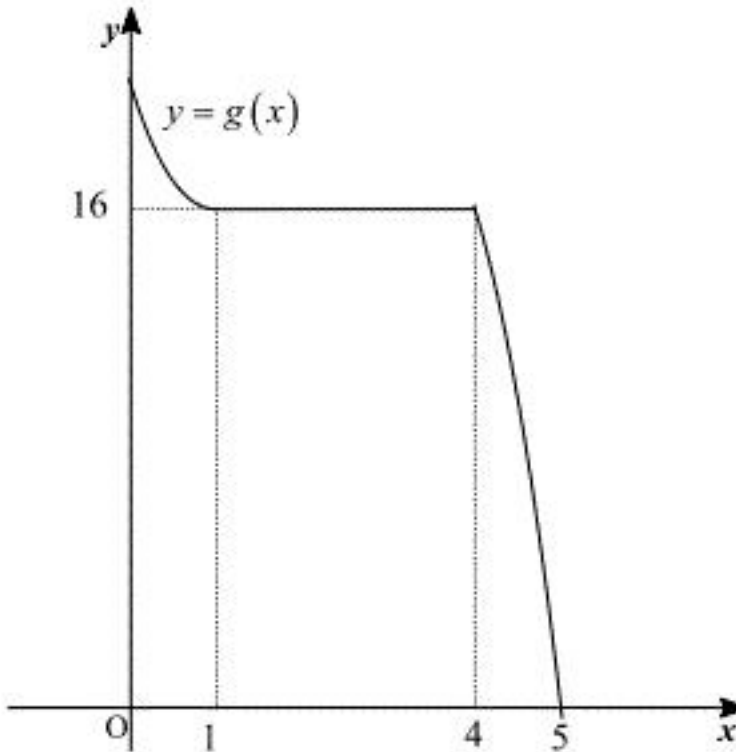
$$g(t) = \begin{cases} f(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 20 & (0 \leq t \leq 1) \\ 16 & (1 < t < 4) \\ f(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 20 & (4 \leq t \leq 5) \end{cases}$$

となる。

$$(答) \quad g(t) = \begin{cases} -t^3 + 6t^2 - 9t + 20 & (0 \leq t \leq 1) \\ 16 & (1 < t < 4) \\ -t^3 + 6t^2 - 9t + 20 & (4 \leq t \leq 5) \end{cases}$$

(5)

曲線 $y = g(x)$ ($0 \leq x \leq 5$) の概形は以下のようになる。



したがって、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 f(x) dx + 3 \cdot 16 + \int_4^5 f(x) dx \\ &= \int_0^1 (-x^3 + 6x^2 - 9x + 20) dx + 48 + \int_4^5 (-x^3 + 6x^2 - 9x + 20) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 20x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 20x \right]_4^5 + 48 \\ &= -\frac{1}{4}(1 + 5^4 - 4^4) + 2(1 + 5^3 - 4^3) - \frac{9}{2}(1 + 5^2 - 4^2) + 20(1 + 5 - 4) + 48 \\ &= \frac{149}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{149}{2}$