

【1】

【解答】

(1)		ア			
		$12-a$			
		イ			
	(i)	8			
		ウ	エ	オ	
(2)	(ii)	6	$\frac{389}{36}$	$\sqrt{389}$	
	(i)	カ	キ		
		$-6-2\sqrt{11}$	$-6+2\sqrt{11}$		
	(ii)	ク	ケ		
		$\frac{6}{5}$	$-\frac{4}{5}$		
	(iii)	コ			
		$\frac{3}{2}$			

【解説】

(1)

(〔1〕(1)の問題文において条件「 $a > b$ 」は「 $a \geq b$ 」の誤りであり、「 $a > b$ 」の条件だとウ～オに入る解が存在しないことが大学公表解答の中で指摘されています。以下の解答では正しく全問解ける「 $a \geq b$ 」を条件として採用しました。)

変量 x のデータの平均値は $\frac{31}{6}$ であるから、

$$\frac{10+7+a+0+b+2}{6} = \frac{31}{6}$$

$$\therefore b = 12 - a$$

と表せる。

(i)

変量 x のデータの各数値を x_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$)、平均を $\bar{x}$ 、分散を s_x^2 とおき、 s_x^2 を a を用いて表すと

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \sum_{i=1}^6 x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^6 x_i + \sum_{i=1}^6 (\bar{x})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i^2 - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \frac{1}{6} \cdot 6(\bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i^2 - (\bar{x})^2 \\ &= \frac{10^2 + 7^2 + a^2 + 0^2 + b^2 + 2^2}{6} - \left(\frac{31}{6} \right)^2 \\ &= \frac{6(153 + a^2 + b^2) - 961}{36} \\ &= \frac{6(a^2 + b^2) - 43}{36} \\ &= \frac{6\{a^2 + (12-a)^2\} - 43}{36} \quad (\because b = 12 - a) \\ &= \frac{12a^2 - 144a + 821}{36} \end{aligned}$$

となる。分散の値が $s_x^2 = \frac{437}{36}$ であるとき、

$$\begin{aligned} 12a^2 - 144a + 821 &= 437 \\ \Leftrightarrow 12a^2 - 144a + 384 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 12a + 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-4)(a-8) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$a \geq b = 12 - a$$

$$\therefore a \geq 6$$

であるから、条件を満たすのは $a = 8$ である。

(ii)

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{12a^2 - 144a + 821}{36} \\ &= \frac{12(a-6)^2 + 389}{36} \end{aligned}$$

と変形でき、 $a \geq 6$ において、 $a = 6$ のときに分散の値は最小となり、このときの分散は

$\frac{389}{36}$ である。また、標準偏差は $s_x = \frac{\sqrt{389}}{6}$ である。 $y = -6x + 5$ によって定まる新たな変量 y に

ついての各数値を y_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$)、平均を $\bar{y}$ 、標準偏差を s_y とおくと、

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \{-6x_i + 5 - (-6\bar{x} + 5)\}^2 \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 6^2 (x_i - \bar{x})^2 \\ &= 36s_x^2 \\ &= 389 \\ \therefore s_y &= \sqrt{389} \quad (\because s_y > 0) \end{aligned}$$

となる。

(2)

(i)

直線 $\ell: y = a(x+3)$ と放物線 $C: y = x^2 + 2$ を連立すると、

$$\begin{aligned} x^2 + 2 &= a(x+3) \\ \Leftrightarrow x^2 - ax + 2 - 3a &= 0 \end{aligned}$$

となる。直線 ℓ と放物線 C が少なくとも1つの共有点をもつのは、2次方程式

$x^2 - ax + 2 - 3a = 0$ が少なくとも1つの実数解をもつときである。 $x^2 - ax + 2 - 3a = 0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= a^2 - 4(2 - 3a) \\ &= a^2 + 12a - 8 \\ &= (a + 6 + 2\sqrt{11})(a + 6 - 2\sqrt{11}) \end{aligned}$$

となる。 $D \geq 0$ であればよいので、 a のとり得る値の範囲は

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a + 6 + 2\sqrt{11})(a + 6 - 2\sqrt{11}) &\geq 0 \\ \therefore a &\leq -6 - 2\sqrt{11}, a \geq -6 + 2\sqrt{11} \end{aligned}$$

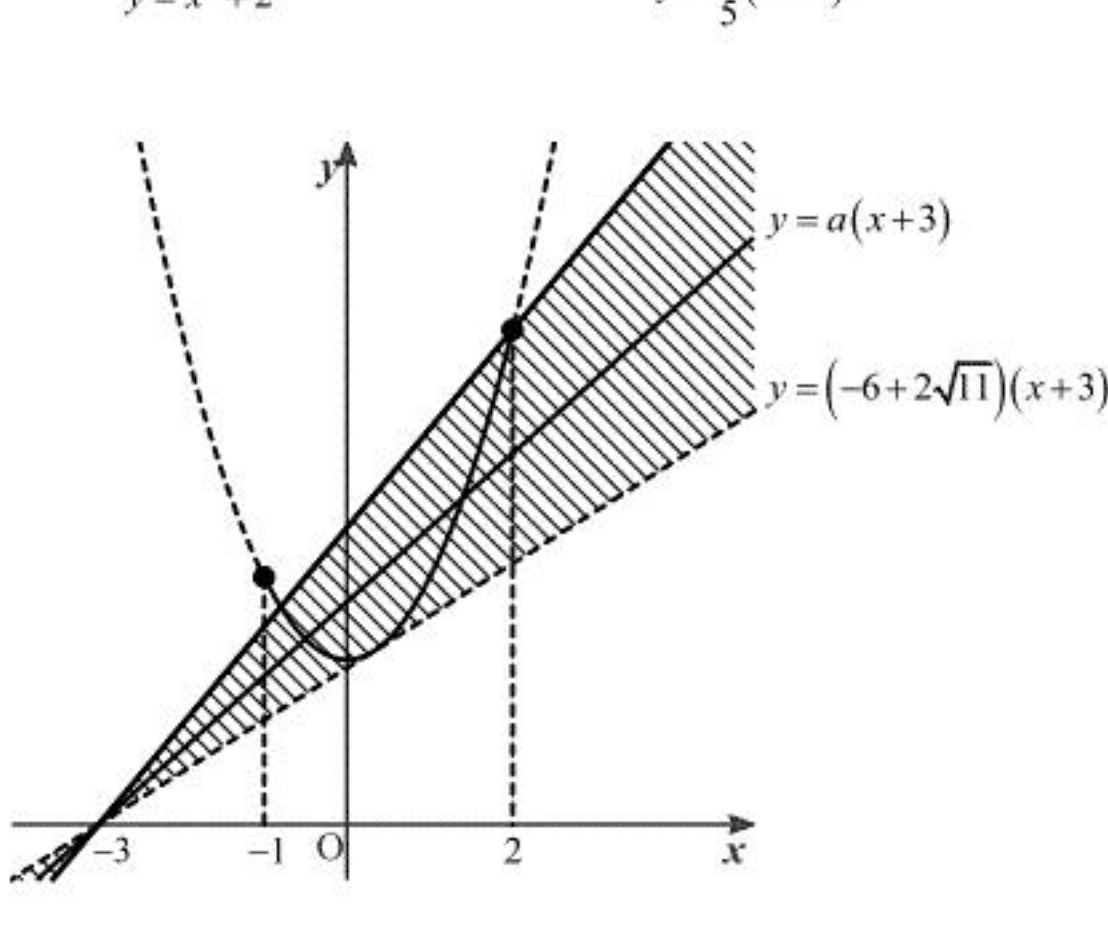
である。

(ii)

直線 $\ell: y = a(x+3)$ は a の値によらず、点 $(-3, 0)$ を通る。ここで、直線 ℓ の傾き a によって、

直線と放物線 C の $-1 \leq x \leq 2$ の部分の共有点の個数がどのように変化するかを考える。

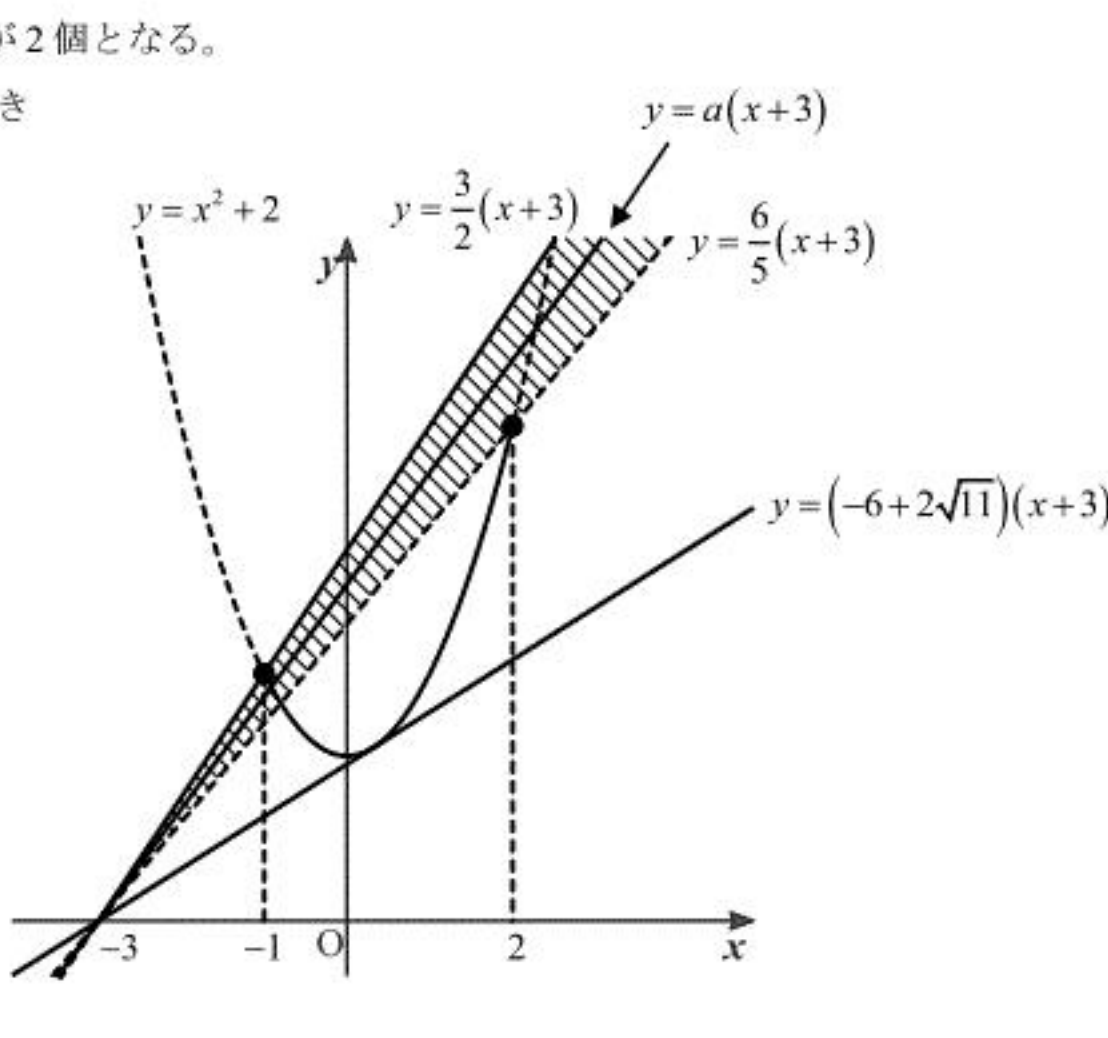
[1] 共有点が2個のとき



上図より、 a の値が ℓ と C が $-1 \leq x \leq 2$ の部分で接するときの傾きより大きく、 ℓ が点 $(2, 6)$ を通るとき傾き以下であれば条件を満たす。 ℓ と C が $-1 \leq x \leq 2$ の部分で接するときの傾きについて、2次方程式 $x^2 - ax + 2 - 3a = 0$ が重解となり、また傾きは正であるから、(i) より $a = -6 + 2\sqrt{11}$ となる。一方、 ℓ が点 $(2, 6)$ を通るとき傾きは $a = \frac{6}{5}$ である。

このときの ℓ と C の交点の x 座標は $x = -\frac{4}{5}, 2$ である。以上より、 $-6 + 2\sqrt{11} < a \leq \frac{6}{5}$ のときに共有点が2個となる。

[2] 共有点が1個のとき



同様に考えて、上図より、 ℓ と C が $-1 \leq x \leq 2$ の部分で接するとき、または、 a の値が ℓ が点 $(2, 6)$ を通るとき傾きより大きく点 $(-1, 3)$ を通るとき傾き以下のときに条件を満たす。 ℓ と C が $-1 \leq x \leq 2$ の部分で接するとき、[1] から $a = -6 + 2\sqrt{11}$ である。また、

ℓ が点 $(-1, 3)$ を通るとき傾きは $a = \frac{3}{2}$ である。以上より、 $a = -6 + 2\sqrt{11}, \frac{6}{5} \leq a \leq \frac{3}{2}$ のときに共有点が1個となる。

以上[1],[2]より、まず、直線 ℓ と放物線 C が異なる2つの共有点を持ち、それら x 座標が2

つとも $-1 \leq x \leq 2$ の範囲にあるとき、 a のとりうる値の範囲は $-6 + 2\sqrt{11} < a \leq \frac{6}{5}$ である。ま

た、 a がこの範囲を動くとき、 b の値が最小となるのは $a = \frac{6}{5}$ のときで、このとき $b = -\frac{4}{5}$ である。

(iii)

(ii) [1],[2]より、直線 ℓ と放物線 C が異なる2つの共有点を持ち、そのうち少なくとも1つの

共有点が $-1 \leq x \leq 2$ の範囲にあるとき、 a のとりうる値の範囲は $-6 + 2\sqrt{11} < a \leq \frac{3}{2}$ である。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	2	2	-17	49	$3+2i$
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	$\frac{\sqrt{6}}{9}$	$\frac{5\sqrt{3}}{9}$	$5\sqrt{2}$	$\frac{7}{11}$	$\left(\frac{1}{11}, \frac{10}{11}, \frac{19}{11}\right)$

〔解説〕

(1)

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ は $-1+i$ を解にもつので、 $x=-1+i$ を代入すると

$$\begin{aligned}(-1+i)^2+a(-1+i)+b&=0 \\ \Leftrightarrow -2i-a+ai+b&=0 \\ \Leftrightarrow (-a+b)+i(a-2)&=0\end{aligned}$$

となる。 a, b は実数であるから、

$$\begin{cases} -a+b=0 \\ a-2=0 \end{cases}$$

となり、このとき $a=2, b=2$ である。また、整式 $P(x)=cx^3-10x^2+12x+d$ を x^2+2x+2 で割ったときの商を $Q(x)$ (ただし、 $Q(x)$ は 1 次以下の整式) とおくと、

$$cx^3-10x^2+12x+d=(x^2+2x+2)Q(x)-2x+1$$

と書ける。 $x=-1+i$ を代入すると、

$$\begin{aligned}c(-1+i)^3-10(-1+i)^2+12(-1+i)+d&=0\cdot Q(x)-2(-1+i)+1 \\ \Leftrightarrow c\cdot(-2i)(-1+i)-10\cdot(-2i)+14(-1+i)+d-1&=0 \\ \Leftrightarrow 2ci+2c+20i-14+14i+d-1&=0 \\ \Leftrightarrow (2c+d-15)+i(2c+34)&=0\end{aligned}$$

となる。 c, d は実数であるから、

$$\begin{cases} 2c+d-15=0 \\ 2c+34=0 \end{cases}$$

となり、このとき $c=-17, b=49$ である。さらに、2 次方程式 $x^2+2x+2=0$ は $-1-i$ を解にもつので、 $P(-1-i)$ の値は

$$\begin{aligned}P(-1-i)&=0\cdot Q(x)-2(-1-i)+1 \\ &=3+2i\end{aligned}$$

である。

(2)

$\overrightarrow{AB}=(1, -1, 4), \overrightarrow{AC}=(-2, 2, 2)$ であり、また $0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから、

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} \\ &=\frac{4}{3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}} \\ &=\frac{\sqrt{6}}{9} \\ \sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2} \\ &=\frac{5\sqrt{3}}{9} \quad (\because \sin\theta>0)\end{aligned}$$

である。また、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\sin\theta&=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot \frac{5\sqrt{3}}{9} \\ &=5\sqrt{2}\end{aligned}$$

である。実数 k を用いて、 $\overrightarrow{BH}=k\overrightarrow{BC}$ と表す。このとき、 $\overrightarrow{BC}=(-3, 3, -2)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}&=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC} \\ &=(1, -1, 4)+k(-3, 3, -2) \\ &=(1-3k, -1+3k, 4-2k)\end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}&=0 \\ \Leftrightarrow (1-3k, -1+3k, 4-2k)\cdot(-3, 3, -2)&=0 \\ \Leftrightarrow -3(1-3k)+3(-1+3k)-2(4-2k)&=0 \\ \Leftrightarrow 22k-14&=0 \\ \therefore k&=\frac{7}{11}\end{aligned}$$

となる。また、 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{BC}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}&=\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{BC} \\ &=(2, -1, 3)+\frac{7}{11}(-3, 3, 2) \\ &=\left(\frac{1}{11}, \frac{10}{11}, \frac{19}{11}\right)\end{aligned}$$

である。したがって、点 H の座標は $\left(\frac{1}{11}, \frac{10}{11}, \frac{19}{11}\right)$ である。

[3]

(1)

$f(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x$ について,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^2 - 22x + 8 \\ &= (9x - 4)(x - 2) \end{aligned}$$

であるから, $f'(x) = 0$ のとき, $x = \frac{4}{9}, 2$ である。増減表は下表となる。

x	...	$\frac{4}{9}$	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{400}{243}$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

したがって, $x = \frac{4}{9}$ で極大値 $\frac{400}{243}$, $x = 2$ で極小値 -4 をとる。

(答) 極大値 $\frac{400}{243}$, 極小値 -4

(2)

$y = f(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x$ と $y = -ax^2 + x$ を連立すると

$$3x^3 - 11x^2 + 8x = -ax^2 + x$$

$$\Leftrightarrow x\{3x^2 + (a - 11)x + 7\} = 0 \quad \cdots \text{①}$$

となる。放物線 $y = -ax^2 + x$ が曲線 $y = f(x)$ と異なる 3 つの共有点をもつのは, ①が異なる 3 つの実数解をもつときであるが, $3x^2 + (a - 11)x + 7 = 0$ は $x = 0$ を解に持たないから, $3x^2 + (a - 11)x + 7 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよい。2 次方程式 $3x^2 + (a - 11)x + 7 = 0$ の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} D &= (a - 11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 \\ &= (a - 11 + 2\sqrt{21})(a - 11 - 2\sqrt{21}) \end{aligned}$$

である。 $3x^2 + (a - 11)x + 7 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつのは $D > 0$ のときであるから,

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow (a - 11 + 2\sqrt{21})(a - 11 - 2\sqrt{21}) &> 0 \\ \therefore a < 11 - 2\sqrt{21}, a > 11 + 2\sqrt{21} \end{aligned}$$

となる。 $a > 0$ のもとでは, a のとり得る値の範囲は $0 < a < 11 - 2\sqrt{21}, a > 11 + 2\sqrt{21}$ である。

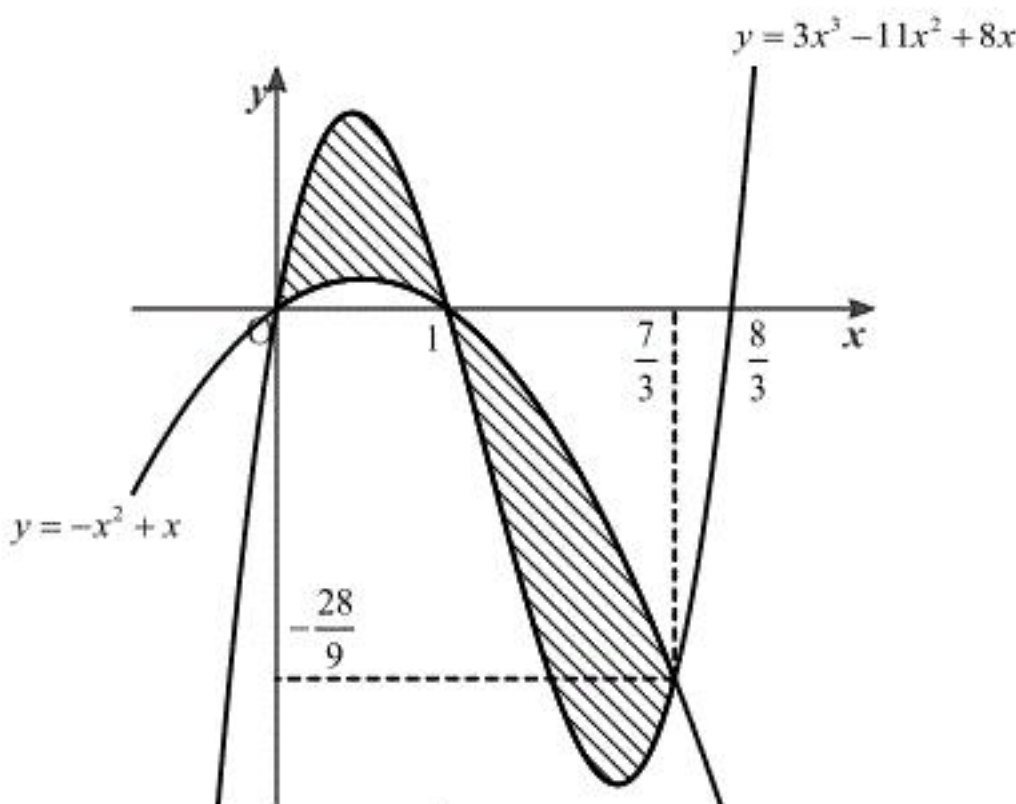
(答) $0 < a < 11 - 2\sqrt{21}, a > 11 + 2\sqrt{21}$

(3)

放物線 $y = -x^2 + x$ と曲線 $y = f(x)$ の共有点の x 座標は, ①で $a = 1$ として,

$$\begin{aligned} x(3x^2 - 10x + 7) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 1)(3x - 7) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 1, \frac{7}{3} \end{aligned}$$

である。 $y = -x^2 + x$ と $y = f(x)$ のグラフの概形は下図となる。また, $y = -x^2 + x$ と $y = f(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積は下図の斜線部の面積である。



したがって, 求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(3x^3 - 11x^2 + 8x) - (-x^2 + x)\} dx + \int_1^{7/3} \{(-x^2 + x) - (3x^3 - 11x^2 + 8x)\} dx \\ &= \int_0^1 (3x^3 - 10x^2 + 7x) dx + \int_1^{7/3} (-3x^3 + 10x^2 - 7x) dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{3}{4}x^4 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 \right]_1^{7/3} \\ &= \left(\frac{3}{4} - \frac{10}{3} + \frac{7}{2} \right) - 0 + \left\{ -\frac{3}{4}\left(\frac{7}{3}\right)^4 + \frac{10}{3}\left(\frac{7}{3}\right)^3 - \frac{7}{2}\left(\frac{7}{3}\right)^2 \right\} - \left(-\frac{3}{4} + \frac{10}{3} - \frac{7}{2} \right) \\ &= \frac{11}{12} + \frac{343}{324} + \frac{11}{12} \\ &= \frac{937}{324} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{937}{324}$