

【1】

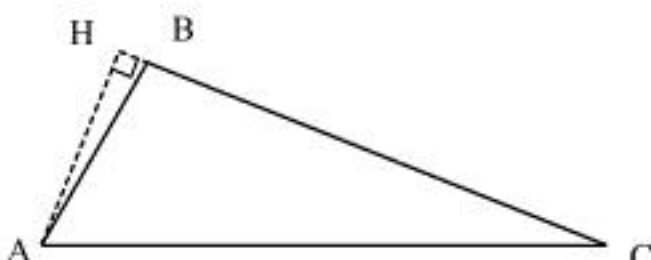
【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	7	$6\sqrt{3}$	$\frac{12\sqrt{3}}{7}$	$\frac{7\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	624	$0.124_{(5)}$	4	228	48

【解説】

(1)

与えられた条件より、4点A,B,C,Hの位置関係は下図のようになる。



△ABCに対して余弦定理を用いて、

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC \\&= 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \\&= 49\end{aligned}$$

である。BC>0であるからBC=7となる。また、△ABCの面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\&= 6\sqrt{3}\end{aligned}$$

であり、△ABCの面積はAHを用いると、

$$\frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{7}{2}AH$$

と表せるから、

$$\begin{aligned}\frac{7}{2}AH &= 6\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow AH &= \frac{12\sqrt{3}}{7}\end{aligned}$$

である。さらに、△ABCの外接円の半径をRとすると△ABCに対して正弦定理を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\sin \angle BAC} &= 2R \\ \Leftrightarrow R &= \frac{7}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

である。また、△ABCの内接円の半径をrとすると、△ABCの面積はrを用いると、

$$\frac{1}{2}(AB+BC+CA)r = 9r$$

と表せるから、

$$\begin{aligned}9r &= 6\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

である。

(2)

5進法で表すと4桁となるような自然数のうち最大のものは $4444_{(5)}$ であり、これを10進法で表すと

$$\begin{aligned}4444_{(5)} &= 4(5^3 + 5^2 + 5^1 + 5^0) \\&= 4 \cdot 156 \\&= 624\end{aligned}$$

である。また、10進法で表された数0.312は

$$\begin{aligned}0.312 &= 0.2 + 0.112 \\&= \frac{1}{5} + 0.04 \cdot 2 + 0.032 \\&= \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + 0.008 \cdot 4 \\&= \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3}\end{aligned}$$

とできるから、これを5進法で表すと $0.124_{(5)}$ である。7進法で表すと $bbb_{(7)}$ となるような自然数Mは10進法で表すと

$$\begin{aligned}M &= b(7^2 + 7^1 + 7^0) \\&= 57b\end{aligned}$$

である。ここで

$$M \equiv 57b \equiv 2b \pmod{5}$$

とでき、 $1 \leq b \leq 6$ であるから、Mを5で割ったときの余りが3となるのは **$b=4$** のときで、このとき **$M=228$** である。また、7進法で表すと $0.cc_{(7)}$ となるような自然数は10進法で表すと、

$$\begin{aligned}0.cc_{(7)} &= c\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2}\right) \\&= \frac{8}{49}c\end{aligned}$$

である。これと $0.cc_{(7)} = \frac{N}{N+1}$ より、

$$\begin{aligned}\frac{8}{49}c &= \frac{N}{N+1} \\ \Leftrightarrow 8cN + 8c &= 49N \\ \Leftrightarrow (49-8c)N &= 8c\end{aligned}$$

となる。ここで **$1 \leq c \leq 6$** より **$49-8c>0$** なので **$N = \frac{8c}{49-8c}$** である。Nは自然数であるから

$c=6$ であり、このとき **$N=48$** である。

【2】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	2	$t^3-27t+81$	3	27	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	$\frac{4}{3}$	$(d-3)\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}+3$	$-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}+3$	$-\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}+3n+9$	8

【解説】

(1)

$a^x > 0$ 、 $a^{-x} > 0$ であるから、相加相乗平均の大小関係より、

$$a^x + a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x \cdot a^{-x}} = 2$$

であり、等号成立は $a^x = a^{-x}$ 、つまり $x = 0$ のときである。これは $x \geq 0$ の条件を満たすから、 $t = a^x + a^{-x}$ の最小値は2である。また y を t の式で表すと

$$\begin{aligned} y &= a^{3x} + a^{-3x} - 24(a^x + a^{-x}) + 81 \\ &= \left\{ (a^x + a^{-x})^3 - 3a^x \cdot a^{-x} (a^x + a^{-x}) \right\} - 24(a^x + a^{-x}) + 81 \\ &= (t^3 - 3t) - 24t + 81 \\ &= t^3 - 27t + 81 \end{aligned}$$

である。ここで y を t について微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 3t^2 - 27 \\ &= 3(t-3)(t+3) \end{aligned}$$

であるから、 $t > 2$ の範囲において $y' = 0$ となるのは $t = 3$ のときである。これより y の増減表は下図のようになる。

t	2	...	3	...
y'		-	0	+
y	35	$\searrow$	27	$\nearrow$

上の増減表から $t \geq 2$ の範囲における y の最小値は $t = 3$ のとき27である。また、 $t = 3$ のときの a^x の値は

$$\begin{aligned} a^x + a^{-x} &= 3 \\ \Leftrightarrow (a^x)^2 + 1 &= 3a^x \\ \therefore (a^x)^2 - 3a^x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

であるからこれを解くと、

$$\begin{aligned} a^x &= \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで $0 < a < 1$ 、 $x \geq 0$ より $0 < a^x \leq 1$ であるから $a^x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ である。

(2)

数列 $\{a_n\}$ について

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{4}{3}a_n - 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 3 &= \frac{4}{3}(a_n - 3) \end{aligned}$$

であり、 $a_1 - 3 = d - 3$ であるから、数列 $\{a_n - 3\}$ は初項 $d - 3$ 、公比 $\frac{4}{3}$ の等比数列である。これ

より数列 $\{a_n - 3\}$ の一般項は $a_n - 3 = (d - 3)\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ とできるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n = (d - 3)\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 3$$

である。また数列 $\{b_n\}$ について、

$$b_{n+2} = \frac{4}{3}b_{n+1} - (n + 1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1} = \frac{4}{3}b_n - n \quad \cdots \textcircled{2}$$

とすると、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ の辺々を引いて、

$$b_{n+2} - b_{n+1} = \frac{4}{3}(b_{n+1} - b_n) - 1$$

とできるから、 $c_n = b_{n+1} - b_n$ とすると

$$c_{n+1} = \frac{4}{3}c_n - 1$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned} c_1 &= b_2 - b_1 \\ &= \left(\frac{4}{3}b_1 - 1\right) - b_1 \\ &= \frac{1}{3}b_1 - 1 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

より、数列 $\{c_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ において初項 $a_1 = \frac{8}{3}$ としたものに等しくなる。これより

$$\begin{aligned} c_n &= \left(\frac{8}{3} - 3\right)\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 3 \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 3 \end{aligned}$$

である。つまり、数列 $\{b_n\}$ は $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 3$ を満たすと分かるので、 $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} + 3 \right\} \\ &= 11 - \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 1}{\frac{4}{3} - 1} + 3(n - 1) \\ &= -\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 3n + 9 \end{aligned}$$

が成り立つ。上式の右辺に $n = 1$ を代入すると(右辺) = 11となり $b_1 = 11$ を満たすから、すべて

の自然数 n に対して $b_n = -\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 3n + 9$ である。また、

$$\begin{aligned} b_n &< b_{n+1} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n &> 0 \\ \Leftrightarrow c_n &> 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 3 &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} &< 9 \\ \Leftrightarrow (n - 1)(2 \log_{10} 2 - \log_{10} 3) &< 2 \log_{10} 3 \\ \therefore n &< \frac{2 \log_{10} 3}{2 \log_{10} 2 - \log_{10} 3} + 1 \end{aligned}$$

である。ここで $\log_{10} 2 = 0.301$ 、 $\log_{10} 3 = 0.477$ より

$$\begin{aligned} \frac{2 \log_{10} 3}{2 \log_{10} 2 - \log_{10} 3} + 1 &= \frac{2 \cdot 0.477}{2 \cdot 0.301 - 0.477} + 1 \\ &= 8.632 \end{aligned}$$

とできるから、条件を満たす n の最大値は8である。

【3】

(1)

曲線 C_2 は曲線 C_1 を x 軸方向に 3, y 軸方向に 3 だけ平行移動した曲線であるから, C_2 の方程式は,

$$\begin{aligned} y-3 &= (x-3)^2 \\ \Leftrightarrow y &= x^2 - 6x + 12 \end{aligned}$$

と表される。これより曲線 C_1 と曲線 C_2 の交点 P の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 &= x^2 - 6x + 12 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

であるから, 点 P の座標 (x_0, y_0) は $(2, 4)$ である。

(答) $P(2, 4)$

(2)

直線 ℓ は $P(2, 4)$ を通る傾き a の直線であるからその方程式は

$$\begin{aligned} y &= a(x-2) + 4 \\ \Leftrightarrow y &= ax - 2a + 4 \end{aligned}$$

である。これと曲線 C_1 の $P(2, 4)$ 以外の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} x^2 - (ax - 2a + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x-a+2) &= 0 \end{aligned}$$

より $x = a - 2$ である。これより共有点が $x < x_0$ の範囲に存在する条件は,

$$a - 2 < 2 \Leftrightarrow a < 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。同様に直線 ℓ と曲線 C_2 の $P(2, 4)$ 以外の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x + 12) - (ax - 2a + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - (a+6)x + 2a + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x-a-4) &= 0 \end{aligned}$$

より $x = a + 4$ である。これより共有点が $x > x_0$ の範囲に存在する条件は

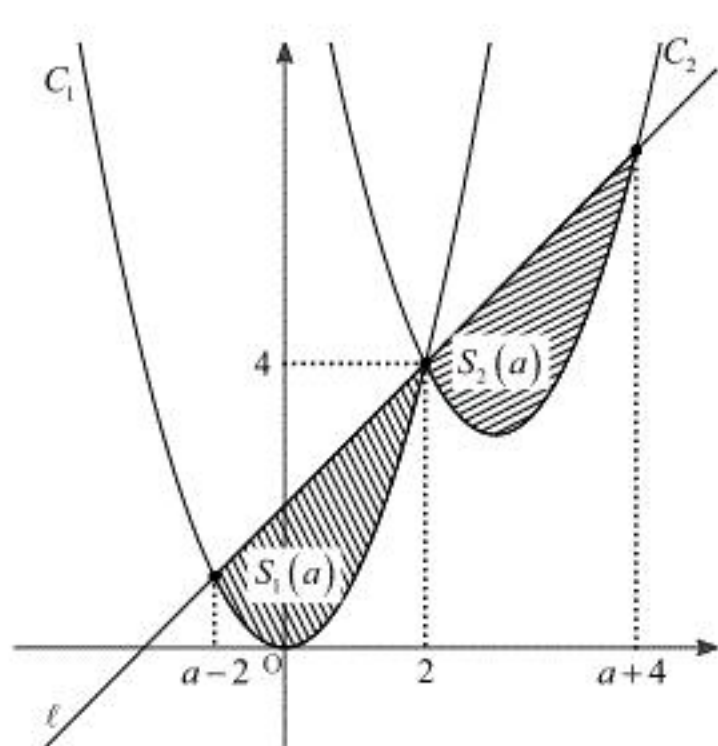
$$a + 4 > 2 \Leftrightarrow a > -2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。以上より, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ から a の取りうる範囲は $-2 < a < 4$ である。

(答) $-2 < a < 4$

(3)

S_1, S_2 は上図の斜線部で示した領域の面積である。



したがって,

$$\begin{aligned} S_1(a) &= \int_{a-2}^2 \{(ax + 4 - 2a) - x^2\} dx \\ &= -\int_{a-2}^2 (x-2)(x-a+2) dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right) \{2 - (a-2)\}^3 \\ &= -\frac{1}{6}a^3 + 2a^2 - 8a + \frac{32}{3} \\ S_2(a) &= \int_2^{a+4} \{(ax + 4 - 2a) - (x^2 - 6x + 12)\} dx \\ &= -\int_2^{a+4} (x-a-4)(x-2) dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right) \{(a+4) - 2\}^3 \\ &= \frac{1}{6}a^3 + a^2 + 2a + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned} S(a) &= S_1(a) + S_2(a) \\ &= \left(-\frac{1}{6}a^3 + 2a^2 - 8a + \frac{32}{3}\right) + \left(\frac{1}{6}a^3 + a^2 + 2a + \frac{4}{3}\right) \\ &= 3a^2 - 6a + 12 \end{aligned}$$

である。

(答) $S(a) = 3a^2 - 6a + 12$

(4)

$S(a) = 3a^2 - 6a + 12$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} 3a^2 - 6a + 12 &= 3(a^2 - 2a) + 12 \\ &= 3(a-1)^2 + 9 \end{aligned}$$

とでき, また(2)より a は $-2 < a < 4$ をみたすから, $S(a)$ は $a = 1$ のときに最小値 $S(1) = 9$ をとる。

(答) $a = 1$ のとき最小値 9