

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	$3-2\sqrt{3}$	5	3	4	$\frac{4+\sqrt{6}}{2}$
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	$\frac{1}{729}$	$\frac{8}{2187}$	$\frac{8n}{9(n-2)}$	18	19

【解説】

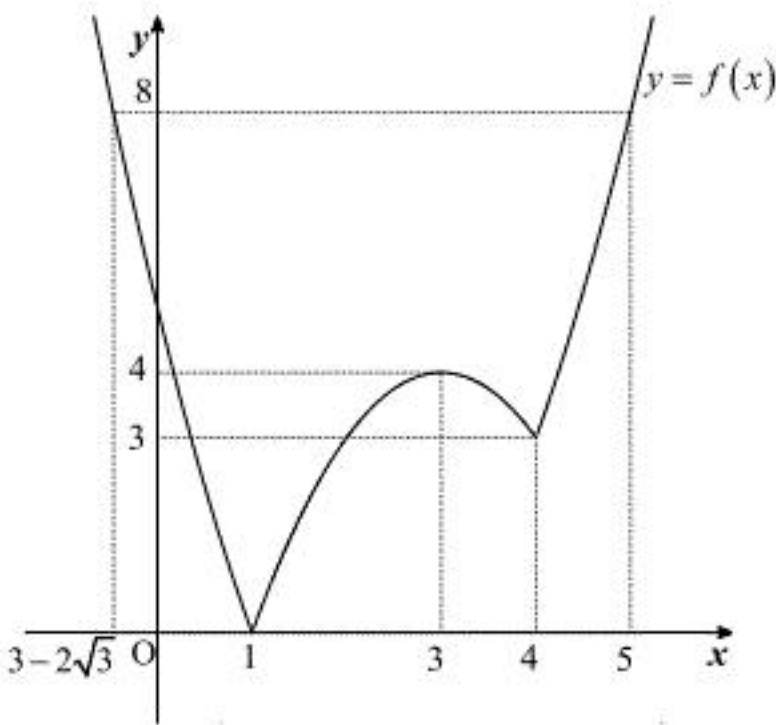
(1)

$$f(x)=|x^2-5x+4|+|x-1|=|(x-1)(x-4)|+|x-1| \text{ であり,}$$
$$(x-1)(x-4)>0\Leftrightarrow x<1, 4<x$$

であるから

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+4-(x-1)=x^2-6x+5 & (x<1 \text{ のとき}) \\ -(x^2-5x+4)+x-1=-x^2+6x-5 & (1\leq x<4 \text{ のとき}) \\ x^2-5x+4+x-1=x^2-4x+3 & (x\geq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。したがって、 $y=f(x)$ のグラフは以下ようになる。



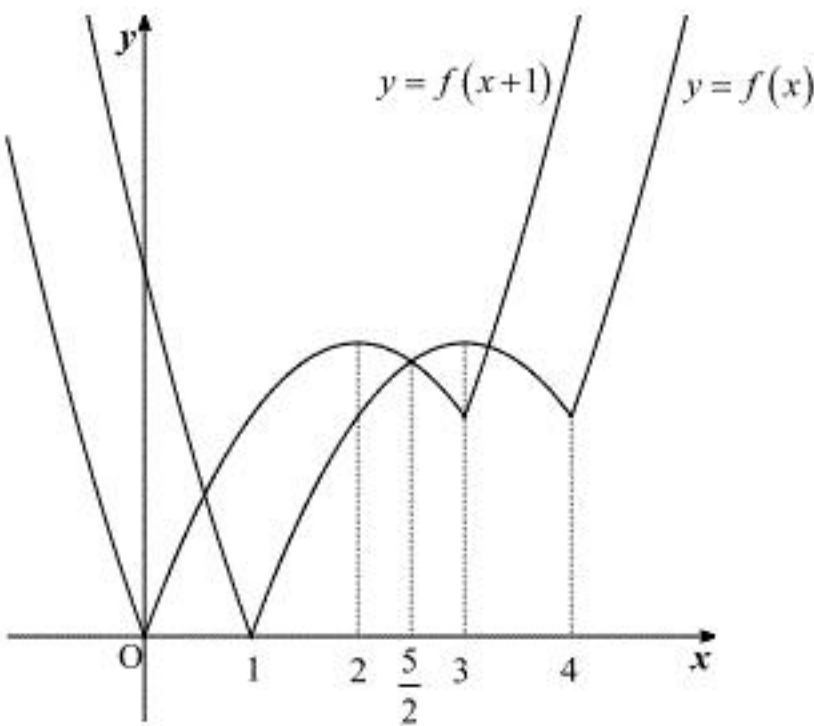
グラフより $y=f(x)$ と $y=8$ は $x<1$ と $x>4$ で交わり、その交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2-6x+5 &= 8 \\ \Leftrightarrow x^2-6x-3 &= 0 \\ \therefore x &= 3-2\sqrt{3} \ (\because x<1) \\ x^2-4x+3 &= 8 \\ \Leftrightarrow x^2-4x-5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5)(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= 5 \ (\because x>4) \end{aligned}$$

であるから

$$f(x)\geq 8\Leftrightarrow x\leq 3-2\sqrt{3}, x\geq 5$$

となる。また、方程式 $f(x)=k$ が 4 個の実数解を持つとき、 k のとりうる値の範囲は、 $3<k<4$ と分かる。 $y=f(x+1)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1 平行移動したものであるから、2 つのグラフを重ねてかくと以下ようになる。



したがって、 $x>\frac{5}{2}$ の範囲で $f(x)=f(x+1)$ を満たすのは

$$\begin{aligned} -x^2+6x-5 &= (x+1)^2-4(x+1)+3 \\ \Leftrightarrow 2x^2-8x+5 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{4+\sqrt{6}}{2} \ (\because x>\frac{5}{2}) \end{aligned}$$

である。

(2)

サイコロ 2 個の目の出方は全部で 36 通りあり、そのうち出た目の数の和が 3 または 11 となる組み合わせは

$$(1, 2), (2, 1), (5, 6), (6, 5)$$

の 4 通りあるから、当たりとなる確率は

$$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

である。 $p(3)$ は、3 回の試行中 3 回とも当たりが出る確率であり、 $p(4)$ は、4 回の試行中、3 回目までに当たりが 2 回、はずれが 1 回出て、4 回目に当たりが出る確率であるから、

$$\begin{aligned} p(3) &= \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{1}{729} \\ p(4) &= {}_3C_1 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{2187} \end{aligned}$$

となる。また、 $p(n)$ は、 n 回の試行中、 $n-1$ 回目までに当たりが 2 回、はずれが $n-3$ 回出て、 n 回目に当たりが出る確率であるから、 $n\geq 3$ において、

$$p(n) = {}_{n-1}C_2 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^{n-3} \times \frac{1}{9}$$

である。これより、

$$\frac{p(n+1)}{p(n)} = \frac{\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{n-3} \cdot \frac{1}{9}} = \frac{8n}{9(n-2)}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{p(n+1)}{p(n)} &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{8n}{9(n-2)} &< 1 \\ \Leftrightarrow 8n &< 9(n-2) \\ \therefore n &> 18 \end{aligned}$$

である。また

$$\frac{p(n+1)}{p(n)} = 1 \Leftrightarrow n = 18$$

であるから、

$$p(3) < p(4) < \cdots < p(18) = p(19) > p(20) > \cdots$$

となるので、 $p(n)$ を最大にする n は、 $n=18, 19$ である。

〔2〕

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{10}{7}$	-3	$-\frac{5}{3}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	1	2^n	2	$\frac{1}{2}$	$n \cdot 2^{n-1}$

〔解説〕

(1)

2点A $(-2, 3)$, B $(4, -1)$ が直線 $y = ax + b$ 上にあるので, a, b の値は

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \\ -1 = 4a + b \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

となり, 点P $(3p-3, -p+6)$ もこの直線上にあるとき,

$$-p+6 = -\frac{2}{3}(3p-3) + \frac{5}{3} \Leftrightarrow p = -\frac{7}{3}$$

であることがわかる。次に $p \neq -\frac{7}{3}$ とする。このとき, $\triangle ABP$ の重心の座標は

$$\left(\frac{-2+4+(3p-3)}{3}, \frac{3+(-1)+(-p+6)}{3}\right) = \left(\frac{3p-1}{3}, \frac{-p+8}{3}\right)$$

と表せるから, これが直線 $y = 2x$ 上にあるとすると,

$$\frac{-p+8}{3} = 2 \cdot \frac{3p-1}{3} \Leftrightarrow p = \frac{10}{7}$$

であり, これは $p \neq -\frac{7}{3}$ を満たす。また,

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (4, -1) - (-2, 3) = (6, -4) \\ \overline{AP} &= (3p-3, -p+6) - (-2, 3) = (3p-1, -p+3) \end{aligned}$$

であるから, $\triangle ABP$ の面積は

$$\frac{1}{2} |6(-p+3) + 4(3p-1)| = |3p+7|$$

と表せるので, これが2であるとする

$$|3p+7| = 2 \Leftrightarrow p = -3, -\frac{5}{3}$$

となる。

(2)

整式 $(x+1)^n$ を x^2-2x+1 で割った商を $Q_n(x)$, 余りを a_nx+b_n ($n=1, 2, 3, \dots$)とする。このとき,

$$(x+1)^1 = (x^2-2x+1) \cdot 0 + x+1$$

であるから, $a_1=1$ である。ここで,

$$(x+1)^n = (x^2-2x+1)Q_n(x) + a_nx + b_n \quad \dots\dots ①$$

に $x=1$ を代入すると

$$a_n + b_n = 2^n \quad \dots\dots ②$$

が成り立つことが分かる。また, ①の両辺に $x+1$ を掛けて整理すると

$$\begin{aligned} (x+1)^{n+1} &= (x^2-2x+1)(x+1)Q_n(x) + (a_nx+b_n)(x+1) \\ &= (x^2-2x+1)(x+1)Q_n(x) + a_nx^2 + (a_n+b_n)x + b_n \\ &= (x^2-2x+1)\{(x+1)Q_n(x) + a_n\} + (3a_n+b_n)x + (-a_n+b_n) \end{aligned}$$

となるから,

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n \quad \dots\dots ③$$

が成り立つ。②, ③より a_{n+1} を a_n のみを用いて表すと

$$a_{n+1} = 2a_n + 2^n \quad \dots\dots ④$$

となる。ここで, $c_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくとき, ④の両辺を 2^{n+1} で割ることで

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow c_{n+1} = c_n + \frac{1}{2}$$

となるから, 数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$, 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列となる。これより

$$c_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2}$$

となるから,

$$a_n = c_n \cdot 2^n = n \cdot 2^{n-1}$$

であることが導かれる。

〔3〕

(1)

$f(x) = -x^3 + ax^2 - 11x + b$ は $x = 1$ で極値 3 をとるので、

$$f'(1) = 0, f(1) = 3$$

が必要である。

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax - 11$$

であるため、

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -3 + 2a - 11 &= 0 \\ \therefore a &= 7 \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ \Leftrightarrow -1 + a - 11 + b &= 3 \\ \Leftrightarrow a + b &= 15 \\ \therefore b &= 8 \end{aligned}$$

である。逆に、このとき $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 8$ であり、

$$f'(x) = -3x^2 + 14x - 11 = -(x-1)(3x-11)$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	...	1	...	$\frac{11}{3}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

したがって、 $f(x)$ は $x = 1$ で極値をとることがわかる。

(答) $a = 7, b = 8$

(2)

$f(2) = 6, f'(2) = 5$ であるから、直線 ℓ の方程式は

$$y = 5(x-2) + 6 = 5x - 4$$

となる。

(答) $y = 5x - 4$

(3)

$y = 3x^2 + 17x + c$ より、

$$y' = 6x + 17$$

であるから、 $x = p$ における接線の方程式は

$$y = (6p + 17)(x - p) + 3p^2 + 17p + c = (6p + 17)x - 3p^2 + c$$

である。これが直線 ℓ に一致するとき

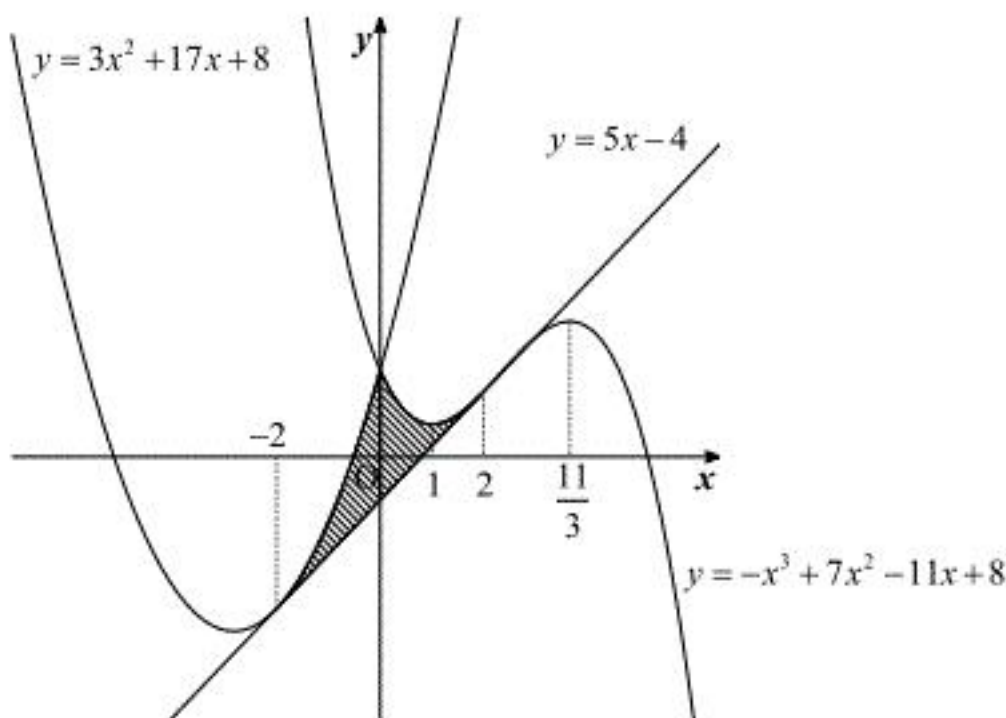
$$\begin{cases} 6p + 17 = 5 \\ -3p^2 + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow (c, p) = (8, -2)$$

となる。

(答) $c = 8, p = -2$

(4)

求める面積は下図の斜線部分である。



したがって、

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 \{(3x^2 + 17x + 8) - (5x - 4)\} dx + \int_0^2 \{(-x^3 + 7x^2 - 11x + 8) - (5x - 4)\} dx \\ &= \int_{-2}^0 3(x+2)^2 dx + \int_0^2 (-x^3 + 7x^2 - 16x + 12) dx \\ &= \left[(x+2)^3 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - 8x^2 + 12x \right]_0^2 \\ &= 8 + \frac{20}{3} \\ &= \frac{44}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{44}{3}$