

【1】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ
	0	$8s^2 - 24s + 36$	$3\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$
(2)	オ	カ	キ	
	2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	
(3)	ク	ケ	コ	
	4	2	3	

〔解説〕

(1)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \cdot 1 + 1 \cdot (-\sqrt{3}) = 0$ である。また、 $|\vec{a}|^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$ 、 $|\vec{b}|^2 = 1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4$ であり、

$s + t = 3 \Leftrightarrow t = -s + 3$ であるから、

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= s^2 |\vec{a}|^2 + 2st \vec{a} \cdot \vec{b} + t^2 |\vec{b}|^2 \\ &= 4s^2 + 2st \cdot 0 + 4t^2 \\ &= 4s^2 + 4(-s + 3)^2 \\ &= 8s^2 - 24s + 36 \\ &= 8\left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + 18 \end{aligned}$$

となる。よって、 $|\vec{p}|^2$ は $s = \frac{3}{2}$ のときに最大値18をとる。 $|\vec{p}| \geq 0$ であるから、 $|\vec{p}|^2$ が最小のとき

$|\vec{p}|$ も最小となる。よって、 $|\vec{p}|$ の最小値は $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ で、そのときの s の値は $\frac{3}{2}$ である。

(2)

$$\begin{aligned} \sin x + \sqrt{3} \cos x &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x \right) \\ &= 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $r = 2$ 、 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ である。よって、

$$\begin{aligned} \sin x + \sqrt{3} \cos x &= 2 \\ \Leftrightarrow 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) &= 2 \\ \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) &= 1 \end{aligned}$$

である。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $\frac{\pi}{3} < x + \frac{\pi}{3} < \frac{5}{6}\pi$ であるから、この方程式の解は、 $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

である。

(3)

与えられた等式の右辺は

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} + \frac{bx-5}{(x+c)^2} &= \frac{(x+c)^2 + (bx-5)(x-2)}{(x-2)(x+c)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2cx + c^2 + bx^2 - (2b+5)x + 10}{(x-2)(x^2 + 2cx + c^2)} \\ &= \frac{(b+1)x^2 + (-2b+2c-5)x + (c^2+10)}{x^3 + (2c-2)x^2 + (c^2-4c)x - 2c^2} \end{aligned}$$

と変形できる。これを与えられた等式の左辺 $\frac{3x^2-3x+19}{x^3+ax^2-3x-18}$ と比較する。両辺の分母の多項

式の x^3 の係数はどちらも1であるから、与えられた等式が恒等式となるためには、両辺の分母及び分子両方の多項式の全ての係数が一致している必要がある。そこで、両辺の分子の x^2 、 x の係数、定数項、分母の x^2 、 x の係数、定数項を比較すると、

$$\begin{cases} b+1=3 \\ -2b+2c-5=-3 \\ c^2+10=19 \\ 2c-2=a \\ c^2-4c=-3 \\ -2c^2=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=b+1 \\ c^2=9 \\ a=2c-2 \\ (c-1)(c-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$$

となる。これらの値を与えられた等式に代入すると、両辺とも $\frac{3x^2-3x+19}{x^3+4x^2-3x-18}$ となり、確かに

恒等式であることが分かる。よって $a=4$ 、 $b=2$ 、 $c=3$ である。

【2】

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
(2, -1)	5	$-\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	(-2, -4)	(-1, 3)	90°	$\frac{25}{2}$	(9, -2)	(-12, 1)

【解説】

円Cの方程式は

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 5^2\end{aligned}$$

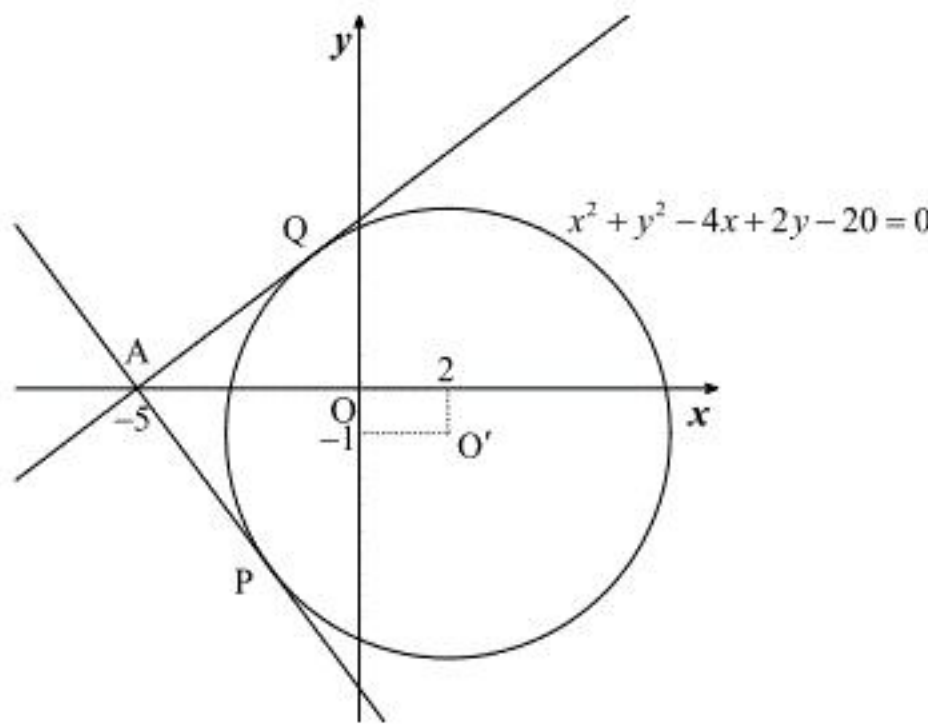
となるから、中心の座標は(2, -1)、半径は5である。点A(-5, 0)から円Cに引いた接線は明らかにy軸と平行でないから、その傾きをmとおくと、接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= m(x+5) \\ \Leftrightarrow mx - y + 5m &= 0\end{aligned}$$

となる。接線と円Cの中心との距離は5であるから

$$\begin{aligned}\frac{|2m - (-1) + 5m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} &= 5 \\ \Leftrightarrow (7m+1)^2 &= 25(m^2+1) \\ \Leftrightarrow 12m^2 + 7m - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3m+4)(4m-3) &= 0\end{aligned}$$

となる。ここで、円Cと点Aから引いた接線を図示すると、2つの接点のうちy座標が小さい方からP, Qであるから、以下の図ようになる。



図より直線APの傾きは負、直線AQの傾きは正であるから、直線APの傾きが $-\frac{4}{3}$ 、直線AQの傾きが $\frac{3}{4}$ であることが分かる。円Cの中心をO'とすると、点P, Qはそれぞれ直線O'Pと直

線APの交点、O'Qと直線AQの交点である。直線O'Pの傾きは、O'P⊥APより $\frac{-1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$ であ

るから、直線O'Pの方程式は、

$$y = \frac{3}{4}(x-2) - 1$$

となる。これと直線APの方程式 $y = -\frac{4}{3}(x+5)$ からyを消去して点Pのx座標を求めると、

$$\begin{aligned}-\frac{4}{3}(x+5) &= \frac{3}{4}(x-2) - 1 \\ \Leftrightarrow 25x &= -50 \\ \Leftrightarrow x &= -2\end{aligned}$$

となる。このとき $y = -\frac{4}{3}(-2+5) = -4$ であるから、点Pの座標は(-2, -4)となる。同様にして、

直線O'Qの傾きは、O'Q⊥AQより $\frac{-1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$ であるから、直線O'Qの方程式は

となる。これと直線AQの方程式 $y = \frac{3}{4}(x+5)$ からyを消去して点Qのx座標を求めると、

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}(x+5) &= -\frac{4}{3}(x-2) - 1 \\ \Leftrightarrow 25x &= -25 \\ \Leftrightarrow x &= -1\end{aligned}$$

となる。このとき $y = \frac{3}{4}(-1+5) = 3$ であるから、点Qの座標は(-1, 3)となる。また、

$$(\text{APの傾き}) \cdot (\text{AQの傾き}) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = -1$$

であるから、AP⊥AQであり∠PAQ=90°である。このとき

$$\begin{aligned}\text{AP} &= \sqrt{(-2+5)^2 + (-4-0)^2} = 5 \\ \text{AQ} &= \sqrt{(-1+5)^2 + (3-0)^2} = 5\end{aligned}$$

であるから、三角形PAQの面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \text{AP} \cdot \text{AQ} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$$

である。AP=AQ=5より点Aを中心とする半径5の円は点P, Qを通り、その方程式は

$$\begin{aligned}(x+5)^2 + y^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10x &= 0\end{aligned}$$

となる。これと円Cの方程式、 $k \neq -1$ を満たす実数kを用いて、点P, Qを通る円の方程式は

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 + k(x^2 + y^2 + 10x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{5k-2}{k+1}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{k+1}\right)^2 &= \frac{20}{k+1} + \left(\frac{5k-2}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k+1}\right)^2\end{aligned}$$

と表せる。半径が $5\sqrt{5}$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{20}{k+1} + \left(\frac{5k-2}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k+1}\right)^2 &= (5\sqrt{5})^2 \\ \Leftrightarrow 20(k+1) + (5k-2)^2 + 1 &= 125(k+1)^2 \\ \Leftrightarrow 2k^2 + 5k + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2k+1)(k+2) &= 0 \\ \therefore k &= -\frac{1}{2}, -2\end{aligned}$$

となり、これらは確かに $k \neq -1$ を満たす。 $k = -\frac{1}{2}$ のとき、円の方程式は

$$(x-9)^2 + (y+2)^2 = 25$$

であるから、中心の座標は(9, -2)である。 $k = -2$ のとき、円の方程式は

$$(x+12)^2 + (y-1)^2 = 25$$

であるから、中心の座標は(-12, 1)である。

【3】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ
	4	40	$\frac{11}{21}$
(2)	エ	オ	
	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{15}$	
(3)	カ	キ	ク
	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{12}{n(n-1)(n-2)}$
(4)	ケ	コ	
	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{7}$	

【解説】

(1)

9 枚のカードから同時に 3 枚のカードを取り出すとき、取り出し方の総数は

$${}_9C_3=84 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。また、箱の中にあるカードのうち 4 枚が偶数で 5 枚が奇数であることから、取り出したカードがすべて偶数である場合の数は

$${}_4C_3=4 \text{ (通り)}$$

である。また、取り出したカードのうち 2 枚が奇数で 1 枚は偶数である場合の数は

$${}_5C_2 \cdot {}_4C_1=10 \cdot 4=40 \text{ (通り)}$$

である。取り出した 3 枚のカードの和が偶数となるのは、3 枚すべてが偶数である場合か 2 枚が奇数で 1 枚が偶数である場合のいずれかであるから、その確率は

$$\frac{4+40}{84}=\frac{11}{21}$$

となる。

(2)

10 枚のカードから同時に 3 枚のカードを取り出すとき、取り出し方の総数は

$${}_{10}C_3=120 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。 $a=1$ であるとき、 b, c は 2 から 10 のいずれかであるので、 $a=1$ となる場合の数は

$${}_9C_2=36 \text{ (通り)}$$

である。よって、その確率は

$$\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

となる。また、 $a+b=3$ となるとき、考えられる (a, b) の組み合わせは

$$(a, b)=(1, 2)$$

のみである。このとき c は 3 から 10 のうちのいずれかをとるので、 $a+b=3$ となる場合の数は

$${}_8C_1=8 \text{ (通り)}$$

であり、その確率は

$$\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

である。

(3)

3 枚のカードから同時に 3 枚のカードを取り出すとき、必ず $(a, b, c)=(1, 2, 3)$ となる。このとき $a+b+c=6$ であるから、 $a+b+c=8$ となる (a, b, c) の組は存在しない。よって、 $n=3$ のときの $a+b+c=8$ となる確率は 0 である。また、4 枚のカードから同時に 3 枚のカードを取り出すとき、取り出し方の総数は

$${}_4C_3=4 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。 $a+b+c=8$ となる組み合わせは

$$(a, b, c)=(1, 3, 4)$$

の 1 通りである。よって、 $n=4$ のときの $a+b+c=8$ となる確率は $\frac{1}{4}$ である。同様に、 n 枚の

カードから同時に 3 枚のカードを取り出すとき、取り出し方の総数は

$${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。 $n \geq 5$ であるとするとき、 $a+b+c=8$ となる組み合わせは

$$(a, b, c)=(1, 2, 5), (1, 3, 4)$$

の 2 通りであるので、 $n \geq 5$ のときの $a+b+c=8$ となる確率は

$$\frac{2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}=\frac{12}{n(n-1)(n-2)}$$

である。

(4)

6 枚のカードから同時に 3 枚のカードを取り出すとき、取り出し方の総数は

$${}_6C_3=20 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。 $a+b+c \geq 13$ となるのは

$$(a, b, c)=(2, 5, 6), (3, 5, 6), (3, 4, 6), (4, 5, 6)$$

の 4 通りである。よって、 $n=6$ のとき $a+b+c \geq 13$ となる確率は、

$$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

である。また、7 枚のカードから同時に 3 枚のカードを取り出すとき、取り出し方の総数は

$${}_7C_3=35 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。 $a+b+c \geq 13$ となるのは

$$(a, b, c)=(1, 5, 7), (2, 4, 7), (1, 6, 7), (2, 5, 7), (3, 4, 7), \\ (2, 6, 7), (3, 5, 7), (3, 6, 7), (4, 5, 7), (4, 6, 7), \\ (5, 6, 7), (2, 5, 6), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6)$$

の 15 通りである。よって、 $n=7$ のとき $a+b+c \geq 13$ となる確率は、

$$\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$$

である。

【4】

(1)

曲線 C を表す式 $y=e^{-x}$ を微分すると、 $y'=-e^{-x}$ となるから、点 $A_1(0,1)$ における曲線 C の接線 ℓ_1 の方程式は

$$y=-e^{-0}(x-0)+1\Leftrightarrow y=-x+1$$

と求まる。また、接線 ℓ_1 と x 軸との交点の x 座標が a_2 であるから、この値は

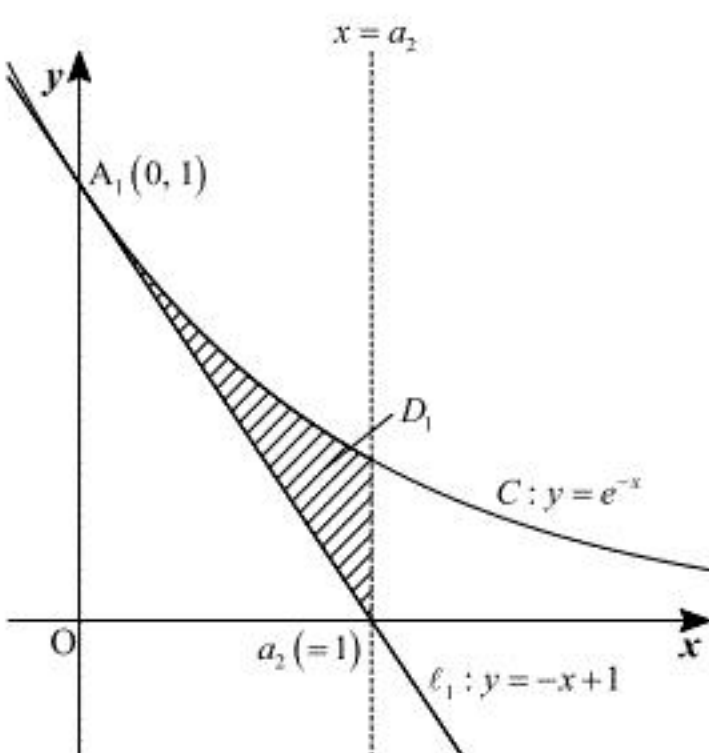
$$0=-a_2+1\Leftrightarrow a_2=1$$

と求まる。

(答) $\ell_1:y=-x+1$, $a_2=1$

(2)

曲線 C と直線 $\ell_1:y=-x+1$ および $x=a_2(=1)$ で囲まれる部分が D_1 であり、 D_1 の面積が S_1 である。 xy 平面上に D_1 を図示すると、下図の斜線部のようになる。



よって、 S_1 の値は

$$S_1=\int_0^1e^{-x}dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\left[-e^{-x}\right]_0^1-\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{e}+1\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$$

と求まる。

(答) $S_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$

(3)

(1)と同様に考えて、点 $A_n(a_n,e^{-a_n})$ における曲線 C の接線 ℓ_n の方程式は

$$y=-e^{-a_n}(x-a_n)+e^{-a_n}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\textcircled{1}$$

となる。また、接線 ℓ_n と x 軸との交点の x 座標が a_{n+1} であるから、

$$0=-e^{-a_n}(a_{n+1}-a_n)+e^{-a_n}\Leftrightarrow e^{-a_n}(a_{n+1}-a_n-1)=0\Leftrightarrow a_{n+1}=a_n+1\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

という漸化式が得られる。ここで、 $a_1=0$ と②を合わせて、数列 $\{a_n\}$ は初項 0 、公差 1 の等差数列であることがわかるから、その一般項は

$$a_n=n-1\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\textcircled{3}$$

となる。そして、③を①に代入することで、直線 ℓ_n の方程式は

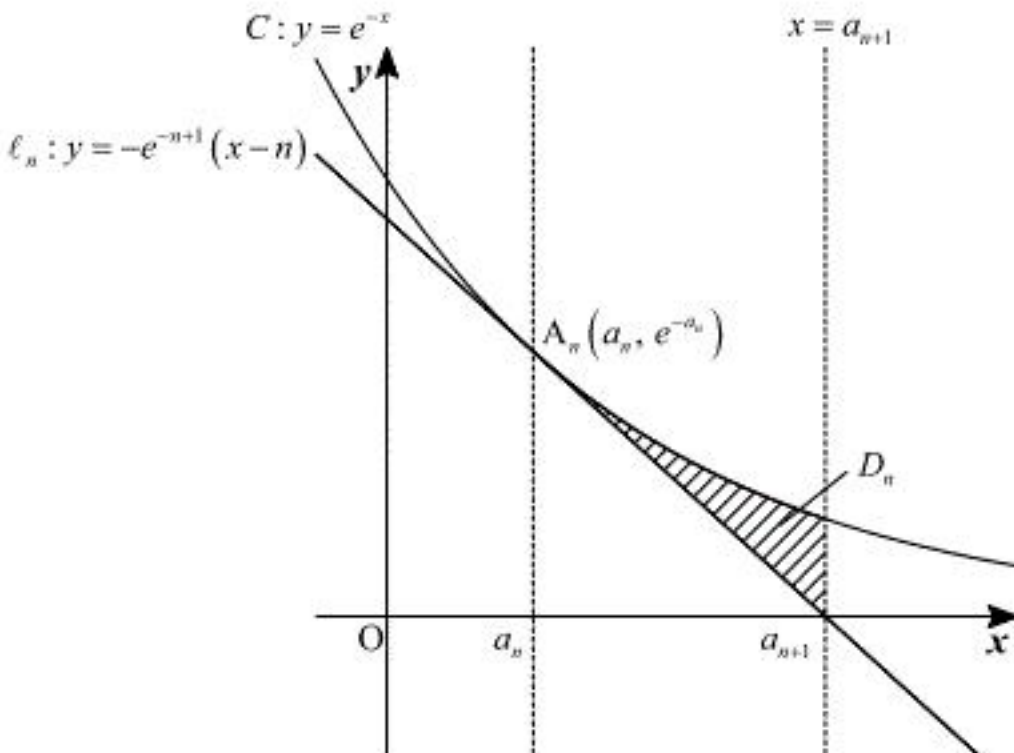
$$y=-e^{-n+1}(x-n+1)+e^{-n+1}\Leftrightarrow y=-e^{-n+1}(x-n)$$

であることがわかる。

(答) 漸化式: $a_{n+1}=a_n+1$ 、数列 $\{a_n\}$ の一般項: $a_n=n-1$ 、直線 $\ell_n:y=-e^{-n+1}(x-n)$

(4)

曲線 C と直線 $\ell_n:y=-e^{-n+1}(x-n)$ および $x=a_{n+1}(=n)$ で囲まれる部分が D_n であり、 D_n の面積が S_n である。 xy 平面上に D_n を図示すると、以下の図の斜線部のようになる。



よって、 S_n の値は

$$\begin{aligned} S_n&=\int_{a_n}^{a_{n+1}}e^{-x}dx-\frac{1}{2}\cdot(a_{n+1}-a_n)\cdot e^{-a_n}\\&=\int_0^1e^{-(x+n-1)}dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{-n+1}\\&=e^{-n+1}\left(\int_0^1e^{-x}dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)\\&=e^{-n+1}\cdot S_1\\&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)\cdot\frac{e}{e^n} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、数列 $\{S_n\}$ は初項 $S_1\left(=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$ 、公比 $\frac{1}{e}$ の等比数列であるから、無限等

比級数は収束($\because -1<\frac{1}{e}<1$)し、 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ の値は

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{1}{e}}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)\cdot\frac{e}{e-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e-2}{e-1}$$

と求まる。

(答) 数列 $\{S_n\}$ の一般項: $S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)\cdot\frac{e}{e^n}$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{e-2}{e-1}$

(5)

D_n を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V_n は、(4)における図より

$$\begin{aligned} V_n&=\pi\int_{a_n}^{a_{n+1}}\left(e^{-x}\right)^2dx-\frac{1}{3}\cdot\pi\left(e^{-a_n}\right)^2\cdot(a_{n+1}-a_n)\\&=\pi\left[\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\right]_{n-1}^n-\frac{1}{3}\cdot\pi\left(e^{-n+1}\right)^2\cdot 1\\&=\pi\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2n}+\frac{1}{2}e^{-2n+2}\right\}-\pi\cdot\frac{1}{3}e^{-2n+2}\\&=\pi\cdot\frac{e^2-3}{6}\cdot e^{-2n} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 数列 $\{V_n\}$ の一般項: $V_n=\pi\cdot\frac{e^2-3}{6}\cdot e^{-2n}$