

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	$6a_1$	$6a_6$	$-a_1+a_6$	$-a_2+a_5$	$-a_1-a_2-a_3+a_4+a_5+a_6$
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	$\frac{5}{108}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{7}{27}$

【解説】

(1)

$x \leq a_1$ のとき、 $f(x)$ の絶対値記号をはずすと、 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ より、

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x-a_1)-(x-a_2)-(x-a_3)-(x-a_4)-(x-a_5)-(x-a_6) \\ &= -6x+(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6) \end{aligned}$$

であるから、 $x < a_1$ のとき、

$$f(x)-f(a_1)=-6x+6a_1 > 0$$

となる。同様に $x \geq a_6$ のとき、 $f(x)$ の絶対値記号をはずすと、

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a_1)+(x-a_2)+(x-a_3)+(x-a_4)+(x-a_5)+(x-a_6) \\ &= 6x-(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6) \end{aligned}$$

であるから、 $x > a_6$ のとき、

$$f(x)-f(a_6)=6x-6a_6 > 0$$

となる。また、 $a_1 \leq x \leq a_6$ のとき、

$$|x-a_1|=x-a_1, |x-a_6|=-(x-a_6)$$

であるから、 $f(x)$ は、

$$f(x)=|x-a_2|+|x-a_3|+|x-a_4|+|x-a_5|+(-a_1+a_6)$$

である。さらに、関数 $|x-a_2|+|x-a_5|$ を $g(x)$ とすると、

$$g(x)=\begin{cases} -2x+(a_2+a_5) & (x < a_2 \text{ のとき}) \\ -a_2+a_5 & (a_2 \leq x \leq a_5 \text{ のとき}) \\ 2x-(a_2+a_5) & (x > a_5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。したがって、 $g(x)$ は $a_2 \leq x \leq a_5$ の範囲において最小値 $-a_2+a_5$ をとるから、

$$f(x) \geq |x-a_3|+|x-a_4|+(-a_1+a_6)+(-a_2+a_5)$$

となる。同様に、関数 $|x-a_3|+|x-a_4|$ は $a_3 \leq x \leq a_4$ の範囲において最小値 $-a_3+a_4$ をとり、 $a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ から、 $f(x)$ は $a_3 \leq x \leq a_4$ において最小値 $-a_1-a_2-a_3+a_4+a_5+a_6$ をとる。中央値 $a^*=\frac{a_3+a_4}{2}$ は $a_3 \leq a^* \leq a_4$ を満たすから、中央値 a^* は関数 $f(x)$ の値を最小にする。

(2)

サイコロの目の出方の総数は $6^3=216$ 通りであり、これらは同様に確からしい。まず、 $X=6$ であるとき、出た目の組み合わせは、

$$(1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2)$$

の3通りである。それぞれの目の出方の総数は、 $(1, 1, 4)$ のとき $\frac{3!}{2!!!}=3$ 通り、 $(1, 2, 3)$ のとき $3!=6$ 通り、 $(2, 2, 2)$ のとき1通りであるから、求める確率は、

$$\frac{3+6+1}{216}=\frac{5}{108}$$

である。 $Y=12$ であるとき、出た目の組み合わせは、

$$(1, 2, 6), (1, 3, 4), (2, 2, 3)$$

の3通りである。それぞれの目の出方の総数は、 $(1, 2, 6)$ および $(1, 3, 4)$ のとき $3!=6$ 通り、 $(2, 2, 3)$ のとき $\frac{3!}{2!!!}=3$ 通りであるから、求める確率は、

$$\frac{6\cdot 2+3}{216}=\frac{5}{72}$$

である。また、 X が3の倍数であるとき、 $3 \leq X \leq 18$ を満たす3の倍数が3, 6, 9, 12, 15, 18に限られることに注意すると、出た目の組み合わせは、

$$\begin{aligned} X=3 &:(1, 1, 1) \\ X=6 &:(1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2) \\ X=9 &:(1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3) \\ X=12 &:(1, 5, 6), (2, 4, 6), (2, 5, 5), (3, 3, 6), (3, 4, 5), (4, 4, 4) \\ X=15 &:(3, 6, 6), (4, 5, 6), (5, 5, 5) \\ X=18 &:(6, 6, 6) \end{aligned}$$

である。それぞれの X について、目の出方の総数を以下の表に示す。

X	3	6	9	12	15	18
総数	1	10	25	25	10	1

表より、求める確率は、

$$\frac{1+10+25+25+10+1}{216}=\frac{1}{3}$$

である。 Y が3の倍数であるとき、出た目のうち少なくとも1つは3を素因数に含む数、すなわち3か6である。ここで、3と6が1つも出ない確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{8}{27}$$

であるから、 Y が3の倍数になる確率は、

$$1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

である。さらに、 X と Y がともに3の倍数であるとき、 X が3の倍数である組み合わせのうち、3か6が含まれているものが条件を満たすことから、出た目の組み合わせは、

$$\begin{aligned} &\left\{ (1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4), \right. && \cdot \cdot \cdot \text{①} \\ &\left. (1, 5, 6), (2, 4, 6), (3, 4, 5), (4, 5, 6) \right. && \\ &(3, 3, 6), (3, 6, 6) && \cdot \cdot \cdot \text{②} \\ &(3, 3, 3), (6, 6, 6) && \cdot \cdot \cdot \text{③} \end{aligned}$$

である。目の出方の総数は、①のときそれぞれ $3!=6$ 通り、②のときそれぞれ $\frac{3!}{2!!!}=3$ 通り、③のときそれぞれ1通りであるから、求める確率は、

$$\frac{6\cdot 8+3\cdot 2+1\cdot 2}{216}=\frac{7}{27}$$

である。

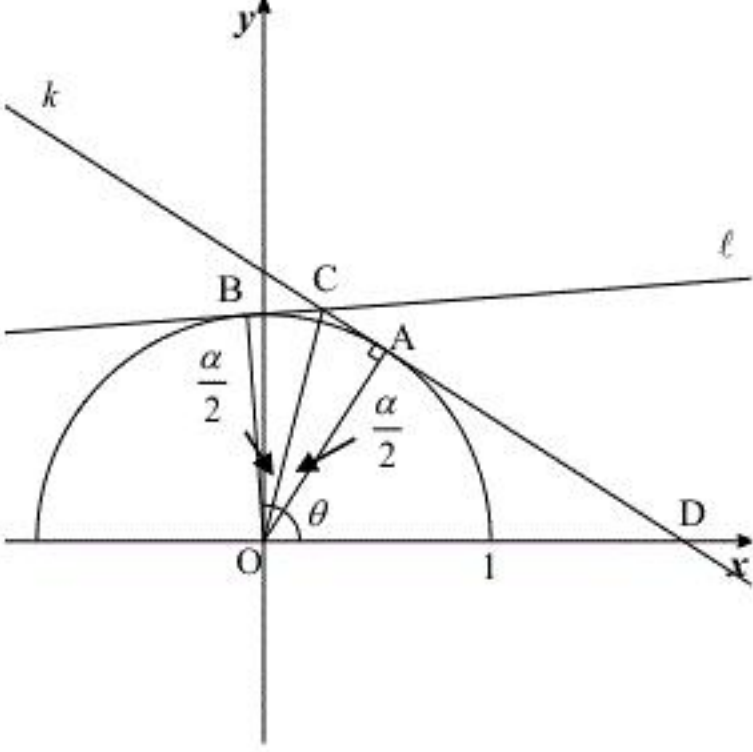
【2】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{\sqrt{13}}$	$\frac{2}{\sqrt{13}}$
	カ	キ	ク	ケ	コ
(2)	2	$1+\frac{1}{2n}$	$4n^2-4n+1$	$\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$	$\frac{10}{7}$

【解説】

(1)



線分OCは $\angle AOB$ を2等分するから、 $\angle AOC = \frac{\alpha}{2}$ である。よって、

$$OC = \frac{OA}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

と表せる。ここで、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \alpha > 0$ であるから

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5}$$

となる。また、 $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ より $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{9}{10} \\ \therefore \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

より、

$$OC = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

である。また、 $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ であるから

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

より、

$$AC = OA \tan \frac{\alpha}{2} = 1 \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{3}$$

と求まる。次に、 $\triangle ODA$ と $\triangle OAC$ の面積はそれぞれ

$$\triangle ODA = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AD = \frac{1}{2} \tan \theta$$

$$\triangle OAC = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AC = \frac{1}{6}$$

と表せるので、 $\triangle ODA$ の面積が $\triangle OAC$ の面積の2倍であるとき

$$\frac{1}{2} \tan \theta = 2 \cdot \frac{1}{6} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{2}{3}$$

となる。よって

$$AD = \tan \theta = \frac{2}{3}$$

である。また、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \theta > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \sin \theta &= \cos \theta \tan \theta = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

である。

(2)

$a_n > 1$ のとき

$$a_{n+1} = \frac{3a_n - 2}{2a_n - 1} = 1 + \frac{a_n - 1}{2a_n - 1} > 1$$

が成り立ち、さらに $a_1 = \frac{3}{2} > 1$ であるから、すべての自然数 n に対して帰納的に $a_n > 1$ である。

このとき、 $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$ とおくと、

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{a_n - 1}{2a_n - 1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1} \\ &= \frac{2a_n - 1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_n - 1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。したがって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \frac{1}{a_1 - 1} = 2$ 、公差2の等差数列であるから

$$b_n = 2 + 2(n - 1) = 2n$$

である。よって、

$$\frac{1}{a_n - 1} = 2n \Leftrightarrow a_n = 1 + \frac{1}{2n}$$

となる。また

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n + 4b_n = c_n + 8n \\ \Leftrightarrow c_{n+1} - c_n &= 8n \end{aligned}$$

であり、 $c_1 = 1$ であるから、 $n \geq 2$ の範囲において

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 8k \\ &= 1 + 8 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n \\ &= 4n^2 - 4n + 1 \end{aligned}$$

となり、これは $n = 1$ のときにも成り立つ。このとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{3} n \{ 2(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 3 \} \\ &= \frac{1}{3} n(2n+1)(2n-1) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{S_k} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{3k}{k(2k+1)(2k-1)} \\ &= 3 \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{10}{7} \end{aligned}$$

である。

[3]

(1)

$f(x) = x^3 - ax^2 - x - a - 2$ のとき、 $f'(x) = 3x^2 - 2ax - 1$ であるから

$$f(-1) = -1 - a + 1 - a - 2 = -2a - 2$$

$$f'(-1) = 3 + 2a - 1 = 2a + 2$$

である。よって接線 ℓ の方程式は

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$$\Leftrightarrow y = (2a+2)(x+1) + (-2a-2)$$

$$\Leftrightarrow y = (2a+2)x$$

である。

(答) $\ell: y = (2a+2)x$

(2)

$$g(x) = (2a+2)x - f(x)$$

$$= -x^3 + ax^2 + (2a+3)x + a + 2$$

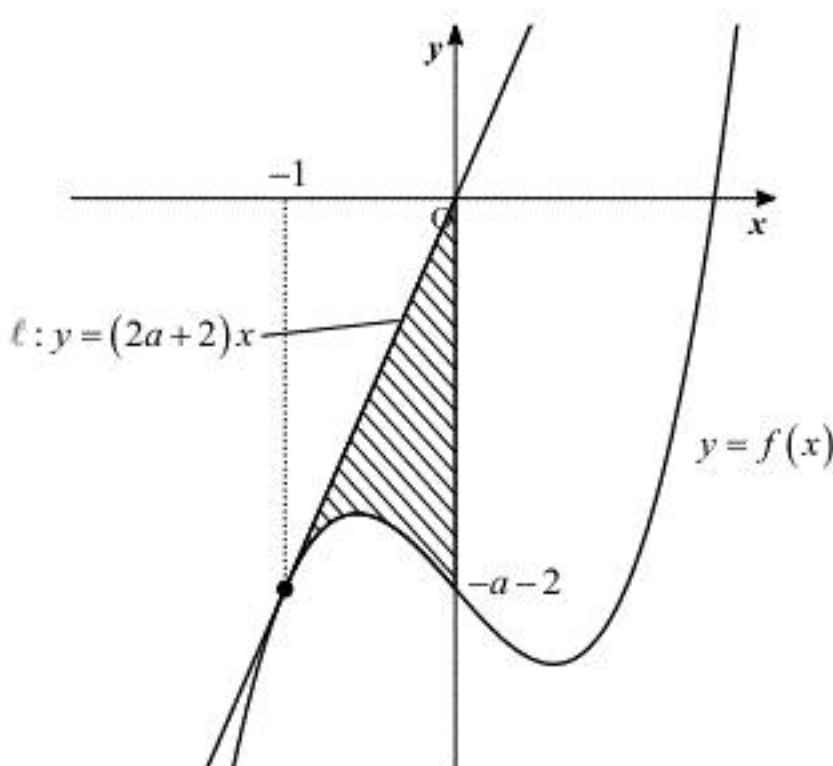
$$= -(x+1)^2 \{x - (a+2)\}$$

とおくと、曲線 $y = f(x)$ と直線 ℓ の共有点の x 座標は $x = -1, a+2$ と分かる。ここで、 $a > -2$

より $a+2 > 0$ であるから、 $x < -1$ および $-1 < x < 0$ の範囲において $g(x) > 0$ 、すなわち

$(2a+2)x > f(x)$ が成り立つ。以上より、曲線 $y = f(x)$ 、直線 ℓ と問題文で示された領域を図

示すると次のようになる。



上図より、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \{(2a+2)x - f(x)\} dx &= \int_{-1}^0 \{-x^3 + ax^2 + (2a+3)x + (a+2)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}ax^3 + \left(a + \frac{3}{2}\right)x^2 + (a+2)x \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3}a - a - \frac{3}{2} + a + 2 \\ &= \frac{1}{3}a + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}a + \frac{3}{4}$

(3)

$f(t) = t^3 - at^2 - t - a - 2$ 、 $f'(t) = 3t^2 - 2at - 1$ であるから、求める接線の方程式は

$$y = f'(t)(x-t) + f(t)$$

$$\Leftrightarrow y = (3t^2 - 2at - 1)(x-t) + (t^3 - at^2 - t - a - 2)$$

$$\Leftrightarrow y = (3t^2 - 2at - 1)x + (-2t^3 + at^2 - a - 2)$$

である。

(答) $y = (3t^2 - 2at - 1)x + (-2t^3 + at^2 - a - 2)$

(4)

(3)で求めた接線が原点を通ると仮定すると

$$0 = -2t^3 + at^2 - a - 2$$

$$\Leftrightarrow 2(t^3 + 1) - a(t^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(t+1)(t^2 - t + 1) - a(t+1)(t-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\{2(t^2 - t + 1) - a(t-1)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)\{2t^2 - (a+2)t + (a+2)\} = 0$$

が成り立つ。 $t+1=0 \Leftrightarrow t=-1$ のとき、(3)で求めた接線の方程式は $y = (2a+2)x$ となり、接線 ℓ

と一致する。一方、 t の 2 次方程式

$$2t^2 - (a+2)t + (a+2) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

について、判別式を D とおくと

$$D = \{-(a+2)\}^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a+2)$$

$$= (a+2)^2 - 8(a+2)$$

$$= (a+2)(a-6)$$

である。 $-2 < a < 6$ のとき $D < 0$ となるから、 $\textcircled{1}$ を満たす実数 t は存在しない。以上より、

$-2 < a < 6$ のときに曲線 $y = f(x)$ の接線で原点を通るものは直線 ℓ 以外に存在しない。

(証明終)