

2018—(B)

◎ 数 学 問 題

15 : 00 ~ 16 : 00 (60分)

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、問題を見てはいけません。
2. 数学の試験用紙は、問題用紙1部(8ページ)、記述式解答用紙(あ)1枚、記述式解答用紙(い)1枚から構成されています。過不足があれば監督者に申し出てください。
なお、記述式解答用紙はセットになっています。監督者の指示に従って、解答用紙を破ったりしないよう注意して、ミシン目に沿って切り離してください。
3. 試験中に試験用紙の印刷の不鮮明、ページの欠落、乱れおよび解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、監督者に申し出てください。
4. 監督者の指示に従って、記述式解答用紙(2枚)の受験番号の記入欄に受験番号をそれぞれ2カ所(計4カ所)記入してください。
5. 解答はすべてHBの黒鉛筆またはHB・0.5 mm以上の芯のシャープペンシルで記入してください。
6. 解答用紙は丁寧に取り扱いってください。
7. 解答は、解答用紙の問題番号を十分に確認のうえ、解答用紙の各問指定の枠内に記入してください。解答用紙の裏面にはいっさい記入してはいけません。下書きなどには問題用紙の余白を利用してください。
8. 解答中以外の解答用紙は必ず裏返しに置いてください。
9. 受験中は不審な行動をとってはいけません。不正行為があれば当該年度の全入学試験を無効とします。
10. 試験時間の途中で退場することはできません。
ただし、気分が悪いなど身体の調子が悪くなった場合は、監督者に申し出てください。
11. 試験終了の合図と同時に解答をやめてください。
12. 問題用紙は試験終了後、持ち帰ってください。

各問題の解答は、解答用紙の同じ問題番号のついた枠内に記入すること。

枠外および問題番号と異なる番号のところに書かれた解答は、採点の対象にはならない。

〔1〕

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

- (1) 6つの実数からなる観測値を $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ と表す。ただし、 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ であるとする。このとき、中央値 $a^* = \frac{a_3 + a_4}{2}$ は関数

$$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + |x - a_4| + |x - a_5| + |x - a_6|$$

の値を最小にすることを次のように証明しよう。

(証明) $x < a_1$ のとき、絶対値記号をはずして整理すると、 $f(x) - f(a_1) = -6x + \text{ア} > 0$ となる。

同様に $x > a_6$ のときには、 $f(x) - f(a_6) = 6x - \text{イ} > 0$ となる。

また、 $a_1 \leq x \leq a_6$ のとき、

$$f(x) = |x - a_2| + |x - a_3| + |x - a_4| + |x - a_5| + \text{ウ}$$

である。さらに、 x の関数 $|x - a_2| + |x - a_5|$ の最小値は エ であるから、

$$f(x) \geq |x - a_3| + |x - a_4| + \text{ウ} + \text{エ}$$

となる。したがって、 $f(x)$ は $a_3 \leq x \leq a_4$ において最小値 オ をとる。

$a_3 \leq a^* \leq a_4$ であるから、中央値 a^* は関数 $f(x)$ の値を最小にする。(証明おわり)

なお、 ア , イ , ウ , エ , オ は $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ を用いて表される数式である。

- (2) 3個のサイコロを同時に投げ、出た目の和を X 、出た目の積を Y とする。このとき、 $X = 6$ である確率は カ であり、 $Y = 12$ である確率は キ である。また、 X が 3 の倍数である確率は ク であり、 Y が 3 の倍数である確率は ケ である。さらに、 X と Y がともに 3 の倍数である確率は コ である。

——— このページは白紙です。 ———

〔2〕

次の文章中の $\square$ に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた $\square$ の中に記入せよ．途中の計算を書く必要はない．

- (1) 座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円を S とし、その上の 2 点 A, B の座標をそれぞれ

$$A(\cos \theta, \sin \theta), \quad B(\cos(\theta + \alpha), \sin(\theta + \alpha))$$

とする．ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ とする．点 A, B における円 S の接線をそれぞれ k, ℓ とし、 k と ℓ の交点を C とする．このとき、 $OC = \square{\text{ア}}$ であり、 $AC = \square{\text{イ}}$ である．さらに、直線 k と x 軸との交点を D とし、 $\triangle ODA$ の面積は $\triangle OAC$ の面積の 2 倍であるとする．このとき、 $AD = \square{\text{ウ}}$ であり、 $\cos \theta = \square{\text{エ}}$, $\sin \theta = \square{\text{オ}}$ である．

- (2) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_{n+1} = \frac{3a_n - 2}{2a_n - 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められているとする．このとき、

$b_n = \frac{1}{a_n - 1}$ とおくと、 $b_{n+1} - b_n = \square{\text{カ}}$ である．ただし、 $\square{\text{カ}}$ は数値である．これを用いて数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると、 $a_n = \square{\text{キ}}$ である．

次に、数列 $\{c_n\}$ を $c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n + 4b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定めると、一般項は $c_n = \square{\text{ク}}$ である．

数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき、 S_n を因数分解した形で表すと $\square{\text{ケ}}$ であり、

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{S_k} = \square{\text{コ}}$$

である．

——— このページは白紙です。 ———

[3]

a を実数とし、 $f(x) = x^3 - ax^2 - x - a - 2$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 $(-1, f(-1))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線 ℓ の方程式を a を用いて表せ。
- (2) a は $a > -2$ の範囲にあるとする。このとき、曲線 $y = f(x)$ 、直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形のうち、 $x \leq 0$ の範囲にある部分の面積を求めよ。
- (3) 実数 t に対して、点 $(t, f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式を a, t を用いて表せ。
- (4) a は $-2 < a < 6$ の範囲にあるとする。このとき、曲線 $y = f(x)$ の接線で原点を通るものは直線 ℓ 以外にないことを示せ。

—— このページは白紙です。 ——

—— このページは白紙です。 ——