

【1】

〔解答〕

	ア	イ	ウ	
(1)	$\frac{2}{7}$	$12\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	
	エ	オ	カ	キ
(2)	4	-7	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3}{4}$
	ク	ケ	コ	
(3)	16	34	466	

〔解説〕

(1)

△ABCにおいて余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos\angle BAC &= \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} \\ &= \frac{49+64-81}{112} \\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

である。また、 $0<\angle BAC<\pi$ より、

$$\begin{aligned}\sin\angle BAC &= \sqrt{1-\cos^2\angle BAC} \\ &= \sqrt{1-\frac{4}{49}} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{7}\end{aligned}$$

となるので、△ABCの面積は、

$$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot \frac{3\sqrt{5}}{7} = 12\sqrt{5}$$

であり、内接円の半径を r とすると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot (7+8+9)\cdot r &= 12\sqrt{5} \\ \therefore r &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$\log_2 x = t$ とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 4\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{5}{2}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}y &= -4 + \left(\log_2 \frac{x}{2}\right)^2 + \log_{\frac{1}{4}} x^4 \\ &= -4 + (\log_2 x - 1)^2 + \frac{\log_2 x^4}{\log_2 \frac{1}{4}} \\ &= -4 + (t-1)^2 + \frac{4\log_2 x}{-2} \\ &= -4 + t^2 - 2t + 1 - 2t \\ &= t^2 - 4t - 3 \\ &= (t-2)^2 - 7\end{aligned}$$

より、 y は $t=2\Leftrightarrow x=4$ で最小値 -7 をとり、 $t=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ で最大値をとる。その値は、

$$\begin{aligned}y &= \left(-\frac{1}{2}-2\right)^2 - 7 \\ &= \frac{25}{4} - 7 \\ &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

となる。

(3)

1000以下の自然数からなる集合を考える。この集合の部分集合のうち、4の倍数からなる集合、5の倍数からなる集合、6の倍数からなる集合をそれぞれ A, B, C とする。また、集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表記する。このとき、

$$\begin{cases} 1000\div 4 = 250 \\ 1000\div 5 = 200 \\ 1000\div 6 = 166 \text{ あまり } 4 \end{cases}$$

であることより、

$$\begin{cases} n(A) = 250 \\ n(B) = 200 \\ n(C) = 166 \end{cases}$$

となる。4, 5, 6のすべてで割り切れるものは4, 5, 6の最小公倍数60で割り切れるものに等しいので、その個数は、

$$1000\div 60 = 16 \text{ あまり } 40$$

であることより、

$$n(A\cap B\cap C) = 16$$

となる。同様に、4, 5の最小公倍数は20、5, 6の最小公倍数は30、4, 6の最小公倍数は12であり、

$$\begin{cases} 1000\div 20 = 50 \\ 1000\div 30 = 33 \text{ あまり } 10 \\ 1000\div 12 = 83 \text{ あまり } 4 \end{cases}$$

であることより、

$$\begin{cases} n(A\cap B) = 50 \\ n(B\cap C) = 33 \\ n(A\cap C) = 83 \end{cases}$$

となる。よって、4と5で割り切れるが6では割り切れないものの個数は、

$$\begin{aligned}n(A\cap B\cap \overline{C}) &= n(A\cap B) - n(A\cap B\cap C) \\ &= 50 - 16 \\ &= 34\end{aligned}$$

であり、4, 5, 6のうち少なくとも1つで割り切れるものの個数は、

$$\begin{aligned}n(A\cup B\cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(B\cap C) - n(A\cap C) + n(A\cap B\cap C) \\ &= 250 + 200 + 166 - 50 - 33 - 83 + 16 \\ &= 466\end{aligned}$$

である。

【2】

【解答】

		ア	イ	ウ
(1)		$\left(-\frac{2ab}{a^2+1}, \frac{2b}{a^2+1}\right)$	3	-5
(2)	(i)	エ	オ	
		$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{(n-1)\cdot n!}{2}$	
	(ii)	カ	キ	
		$\frac{n(n+1)(n-1)}{6}$	$\frac{2(n-1)}{n}$	

【解説】

(1)

点 A の座標を実数 s, t を用いて (s, t) とおく。直線 OA は直線 $y = ax + b$ に垂直であるから、そ

の傾きは $-\frac{1}{a}$ である。よって直線 OA の方程式は、

$$y = -\frac{1}{a}x$$

となる。線分 OA の中点の座標は $\left(\frac{s}{2}, \frac{t}{2}\right)$ であり、この点は直線 OA と直線 $y = ax + b$ の両方の

上にあるので、

$$\begin{cases} \frac{t}{2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{s}{2} & \cdots \cdots \text{①} \\ \frac{t}{2} = a \cdot \frac{s}{2} + b & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

である。①、②より、

$$\begin{aligned} -\frac{s}{2a} &= \frac{as}{2} + b \\ \Leftrightarrow -\frac{a^2+1}{2a}s &= b \\ \therefore s &= -\frac{2ab}{a^2+1} \end{aligned}$$

となり、これを①に代入して、

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{a} \cdot \left(-\frac{2ab}{a^2+1}\right) \\ &= \frac{2b}{a^2+1} \end{aligned}$$

となる。よって点 A の座標は $\left(-\frac{2ab}{a^2+1}, \frac{2b}{a^2+1}\right)$ である。点 $(-1, -3)$ を B とすると、直線 AB は

直線 $y = -2x$ に垂直であるから、その傾きは $\frac{1}{2}$ である。よって直線 AB の方程式は

$$y = \frac{1}{2}(x+1) - 3 = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

となる。線分 AB の中点の座標は $\left(\frac{s-1}{2}, \frac{t-3}{2}\right)$ であり、この点は直線 AB と直線 $y = -2x$ の両方

の上にあるので、

$$\begin{cases} \frac{t-3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s-1}{2} - \frac{5}{2} & \cdots \cdots \text{③} \\ \frac{t-3}{2} = -2 \cdot \frac{s-1}{2} & \cdots \cdots \text{④} \end{cases}$$

である。③、④より、

$$\begin{aligned} \frac{s-11}{4} &= -s+1 \\ \Leftrightarrow s-11 &= -4s+4 \\ \Leftrightarrow 5s &= 15 \\ \therefore s &= 3 \end{aligned}$$

となり、これを④に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{t-3}{2} &= -2 \cdot \frac{3-1}{2} \\ \Leftrightarrow t-3 &= -4 \\ \therefore t &= -1 \end{aligned}$$

となる。よって点 A の座標は $(3, -1)$ であり、線分 OA の傾きは、

$$\frac{-1-0}{3-0} = -\frac{1}{3}$$

である。直線 $y = ax + b$ は線分 OA の垂直二等分線であるから、線分 OA の中点 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ を通

り、傾き 3 の直線である。よってこの直線の方程式は、

$$y = 3\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} = 3x - 5$$

となる。つまり、

$$a = 3, b = -5$$

である。

(2)(i)

与えられた条件より、

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1}{0!} = 0 \\ b_{n+1} &= \frac{a_{n+1}}{n!} \\ &= \frac{n(a_n + n!)}{n!} \\ &= \frac{a_n + n!}{(n-1)!} \\ &= b_n + n \end{aligned}$$

となるので、 $n \geq 2$ において、

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

であり、これは $n=1$ でも成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} a_n &= b_n \cdot (n-1)! \\ &= \frac{(n-1) \cdot n!}{2} \end{aligned}$$

となる。

(ii)

数列 $\{b_n\}$ において、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 - k) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{12} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{6} \end{aligned}$$

となる。また、数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\} (n=2, 3, \dots)$ において、

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{b_k} &= \sum_{k=2}^n \frac{2}{k(k-1)} \\ &= 2 \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{2(n-1)}{n} \end{aligned}$$

となる。

[3]

(1)

放物線 C_1 と放物線 C_2 の共有点 P の x 座標は、

$$x^2 = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$$

$$\Leftrightarrow 4ax = 4a(a+1)$$

$$\therefore x = a+1 (\because a > 0)$$

となる。また y 座標は、

$$y = (a+1)^2$$

となる。

(答) $(a+1, (a+1)^2)$

(2)

$y = x^2$ において、

$$y' = 2x$$

より、点 (t, t^2) における放物線 C_1 の接線の方程式は、

$$y = 2t(x-t) + t^2$$

$$= 2tx - t^2$$

となる。

(答) $y = 2tx - t^2$

(3)

(2) で求めた直線が放物線 C_2 と接するための条件は、方程式

$$2tx - t^2 = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (4a+2t)x + 4a(a+1) + t^2 = 0$$

が重解を持つことである。この方程式の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = (2a+t)^2 - 4a(a+1) - t^2$$

$$= 4a^2 + 4at + t^2 - 4a^2 - 4a - t^2$$

$$= 4at - 4a$$

であり、方程式が重解を持つとき、

$$D = 0$$

$$\Leftrightarrow 4at - 4a = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a(t-1) = 0$$

$$\therefore t = 1 (\because a > 0)$$

となる。

(答) $t = 1$

(4)

直線 ℓ の傾きは、 $t = 1$ より

$$2t = 2$$

であるので、直線 m の傾きも 2 となる。よって直線 m の方程式は、

$$y = 2\{x - (a+1)\} + (a+1)^2$$

$$= 2x - 2a - 2 + a^2 + 2a + 1$$

$$= 2x + a^2 - 1$$

となる。よって直線 m と y 軸との交点の y 座標は $y = a^2 - 1$ であるから、これが正となるような a の範囲は、

$$a^2 - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-1) > 0$$

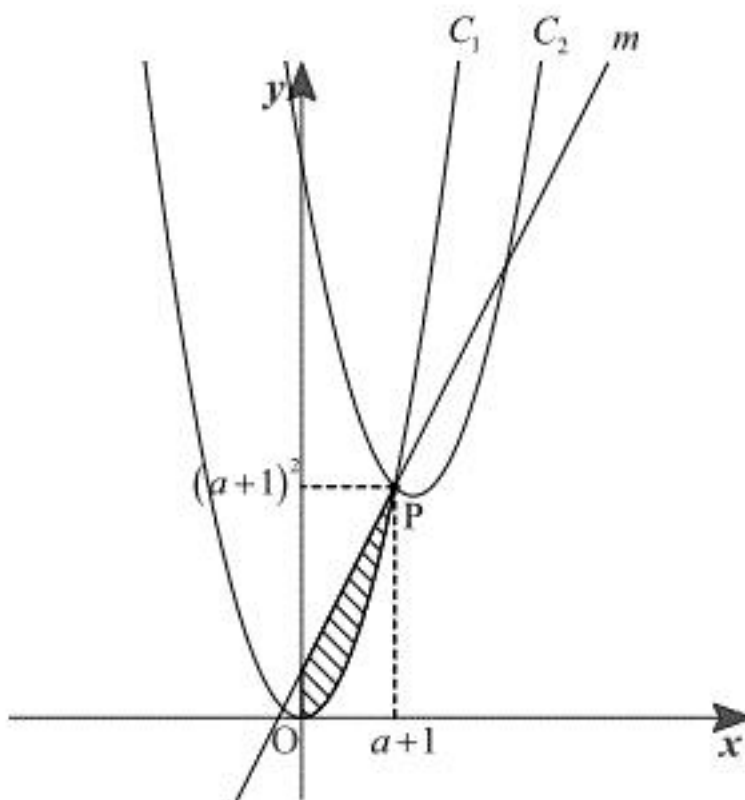
$$\therefore a > 1 (\because a > 0)$$

となる。

(答) $a > 1$

(5)

求める図形の面積は下図の斜線部のようになる。



この面積を S とすると、

$$S = \int_0^{a+1} (2x + a^2 - 1 - x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + (a^2 - 1)x \right]_0^{a+1}$$

$$= -\frac{(a+1)^3}{3} + (a+1)^2 + (a-1)(a+1)^2$$

$$= (a+1)^2 \left(-\frac{a+1}{3} + 1 + a - 1 \right)$$

$$= \frac{(2a-1)(a+1)^2}{3}$$

となる。

(答) $\frac{(2a-1)(a+1)^2}{3}$