

【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ
(1)	$-\frac{4}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{5\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{7}{4}$
(2)	オ $a+1$	カ -3	キ -2	
(3)	ク 1	ケ -2	コ $4\sqrt{2}$	

【解説】

(1)

$\vec{a}+s\vec{b}$ と $\vec{c}$ が垂直になるための条件は、

$$\begin{aligned}(\vec{a}+s\vec{b})\cdot\vec{c}&=0\\ \Leftrightarrow (3+2s, 2+s)\cdot(2, -1)&=0\\ \Leftrightarrow 2(3+2s)+(-1)\cdot(2+s)&=0\\ \therefore s &= -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

となることである。このとき、

$$\begin{aligned}|\vec{a}+s\vec{b}|&= \left|\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}\right|\\ &= \left|\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right|\\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}\\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

である。さらにこのとき、 $(\vec{a}+s\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ と $|\vec{c}|=|(2, -1)|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ を用いて、

$$\begin{aligned}|\vec{a}+s\vec{b}-\vec{c}|^2&=|\vec{a}+s\vec{b}|^2-2(\vec{a}+s\vec{b})\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2\\ &=|\vec{a}+s\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2\\ &=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2+(\sqrt{5})^2\\ &=\frac{50}{9}\\\therefore |\vec{a}+s\vec{b}-\vec{c}|&=\frac{5\sqrt{2}}{3} \left(\because |\vec{a}+s\vec{b}-\vec{c}|>0\right)\end{aligned}$$

が得られる。次に、 $\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{c}$ が平行になるための条件は、 $\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}$ となる 0 でない実数 k が存在することである。ここで

$$\begin{aligned}\vec{a}+t\vec{b}&=k\vec{c}\\\Leftrightarrow (3+2t, 2+t)&=(2k, -k)\\\Leftrightarrow \begin{cases} 3+2t=2k \\ 2+t=-k \end{cases}\\\therefore t &= -\frac{7}{4}, k = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

となることから、 $\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{c}$ が平行になるための条件は

$$t=-\frac{7}{4}$$

である。

(2)

$P(x)=x^4+3x^3+x^2+ax+b$ が $x+1$ で割り切れるとき、剰余の定理より

$$\begin{aligned}P(-1)&=0\\\Leftrightarrow (-1)^4+3(-1)^3+(-1)^2-a+b&=0\\\therefore b &= a+1\hspace{10em} \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、 $P(x)$ が $x^2-1=(x+1)(x-1)$ で割り切れることは、 $P(x)$ が $x+1$ でも $x-1$ でも割り切れることに同値である。ここで、 $P(x)$ が $x-1$ で割り切れるための条件は、剰余の定理より

$$\begin{aligned}P(1)&=0\\\Leftrightarrow 1^4+3\cdot 1^3+1^2+a+b&=0\\\therefore b &= -a-5\hspace{10em} \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

である。よって、 $P(x)$ が x^2-1 で割り切れるための条件は①かつ②が成り立つことであり、これらを連立して解いて、

$$a=-3, \ b=-2$$

となる。このとき、 $P(x)=x^4+3x^3+x^2-3x-2$ となり、これを x^2-1 で割ったときの商は x^2+3x+2 であることから、

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2-1)(x^2+3x+2)\\ &=(x+1)(x-1)(x+2)(x+1)\\ &=(x+1)^2(x-1)(x+2)\end{aligned}$$

と因数分解できる。したがって 4 次方程式 $P(x)=0$ の解は $x=1, -1, -2$ であり、そのうち最も小さいものは

$$x=-2$$

である。

(3)

$X=2^x$ とおく。このとき

$$X>0\hspace{10em} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

であり、方程式 $2^{x+2}+2^{-x+1}-9=0$ は

$$\begin{aligned}2^{x+2}+2^{-x+1}-9&=0\\\Leftrightarrow 2^x\cdot 2^2+2^{-x}\cdot 2^1-9&=0\\\Leftrightarrow 4X+\frac{2}{X}-9&=0\\\Leftrightarrow 4X^2-9X+2&=0\\\Leftrightarrow (X-2)(4X-1)&=0\end{aligned}$$

と変形できる。この 2 次方程式を解くと

$$X=2, \frac{1}{4}$$

であり、いずれも③の条件を満たす。そして、 $X=2$ のときは

$$\begin{aligned}2^x&=2\\\therefore x&=1\end{aligned}$$

となり、 $X=\frac{1}{4}$ のときは

$$\begin{aligned}2^x&=\frac{1}{4}\\\Leftrightarrow 2^x&=2^{-2}\\\therefore x&=-2\end{aligned}$$

となるから、方程式 $2^{x+2}+2^{-x+1}-9=0$ は正の解 $x=1$ と負の解 $x=-2$ をもつ。次に、方程式 $2^{x+2}+2^{-x+1}-a=0$ の解について調べる。再び $X=2^x$ とおくと正の実数 X と実数 x が一対一に対応し、上と同様に考えて方程式 $2^{x+2}+2^{-x+1}-a=0$ は

$$4X+\frac{2}{X}-a=0$$

と変形される。そこで $f(X)=4X+\frac{2}{X}$ とおくと、方程式 $f(X)=a$ に正の解が存在することが、

方程式 $2^{x+2}+2^{-x+1}-a=0$ に解が存在することと同値となる。そこで $X>0$ のときの $f(X)$ のとりうる値の範囲を求める。 $X>0$ であるから、相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}f(X)&=4X+\frac{2}{X}\\\geq 2\sqrt{4X\cdot \frac{2}{X}}\\\&=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

であり、等号成立条件は

$$\begin{aligned}4X&=\frac{2}{X}\\\Leftrightarrow X^2&=\frac{1}{2}\\\Leftrightarrow X&=\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\because X>0\right)\end{aligned}$$

である。さらに $\lim_{X\rightarrow\infty}f(X)=\infty$ かつ $f(X)$ が連続であることから、 $f(X)$ は $4\sqrt{2}$ 以上の任意の

実数をとる。したがって、 $2^{x+2}+2^{-x+1}-a=0$ が解をもつような a の範囲は

$$a\geq 4\sqrt{2}$$

である。

【2】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	
	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	
(2)	エ	オ		
	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{32}$		
(3)	カ	キ	ク	ケ
	$\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{5}{2^n}$	$\frac{3}{2^{n-2}}$	$\frac{5}{2^{n-2}}$
(4)	コ			
	$\frac{k+3}{2^{n-k+2}}$			

【解説】

(1)

$n=4$ のときを考える。 P_4 は　○○○○　と出る確率に等しく、

$$P_4=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

である。次に、 P_3 は　×○○○　または　○○○×　と出る確率に等しく、これらが起こる確率

はそれぞれ $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ であるから、

$$P_3=2\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$

となる。最後に、 P_2 を以下の場合に分けて求める。

[1] 表がちょうど2回連続するのが第1回と第2回の場合

第3回に裏が出ればよく、第4回はどちらでもよい。これが起こる確率は第1, 2, 3回の出

方を考えて

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

である。

[2] 表がちょうど2回連続するのが第2回と第3回の場合

第1回と第4回に裏が出ればよい。これが起こる確率は第1, 2, 3, 4回の出方を考えて

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

である。

[3] 表がちょうど2回連続するのが第3回と第4回の場合

第2回に裏が出ればよく、第1回はどちらでもよい。これが起こる確率は第2, 3, 4回の出

方を考えて

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

である。

以上[1], [2], [3]は排反な事象であるから、

$$P_2=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$$

である。

(2)

$n=5$ のときを考える。 P_4 は　×○○○○　または　○○○○×　と出る確率に等しい。これら

が起こる確率はそれぞれ $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$ であるから、

$$P_4=2\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{16}$$

となる。次に、 P_3 を求める。

[1] 表がちょうど3回連続するのが第1回から第3回の場合

第4回に裏が出ればよく、第5回はどちらでもよい。これが起こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

である。

[2] 表がちょうど3回連続するのが第2回から第4回の場合

第1回と第5回に裏が出ればよい。これが起こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

である。

[3] 表がちょうど3回連続するのが第3回から第5回の場合

第2回に裏が出ればよく、第1回はどちらでもよい。これが起こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

である。

以上[1], [2], [3]は排反な事象であるから、

$$P_3=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}=\frac{5}{32}$$

である。

(3)

$n\geq 6$ とする。 P_{n-1} は第1回は裏で残りは表が出るか、または第 n 回は裏で残りは表が出る確

率に等しく、

$$P_{n-1}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^{n-1}}$$

となる。次に、 P_{n-2} を求める。

[1] 表がちょうど $n-2$ 回連続するのが第1回から第 $n-2$ 回の場合

第 $n-1$ 回に裏が出ればよく、第 n 回はどちらでもよい。これが起こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

である。

[2] 表がちょうど $n-2$ 回連続するのが第2回から第 $n-1$ 回の場合

第1回と第 n 回に裏が出ればよい。これが起こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$$

である。

[3] 表がちょうど $n-2$ 回連続するのが第3回から第 n 回の場合

第2回に裏が出ればよく、第1回はどちらでもよい。これが起こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

である。

以上[1], [2], [3]は排反な事象であるから、

$$P_{n-2}=\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{5}{2^n}$$

である。次に、 P_{n-3} を求める。

[1] 表がちょうど $n-3$ 回連続するのが第1回から第 $n-3$ 回の場合

第1回から第 $n-3$ 回に表が、第 $n-2$ 回に裏が出ればよく、残りはどちらでもよい。これ

が起こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{2^{n-2}}$$

である。

[2] 表がちょうど $n-3$ 回連続するのが第2回から第 $n-2$ 回の場合

第1回に裏が、第2回から第 $n-2$ 回に表が、第 $n-1$ 回に裏が出ればよく、残りはどちら

でもよい。これが起こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

である。

[3] 表がちょうど $n-3$ 回連続するのが第3回から第 $n-1$ 回の場合

第2回に裏が、第3回から第 $n-1$ 回に表が、第 n 回に裏が出ればよく、残りはどちらでも

よい。これが起こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

である。

[4] 表がちょうど $n-3$ 回連続するのが第4回から第 n 回の場合

第3回に裏が、第4回から第 n 回に表が出ればよく、残りはどちらでもよい。これが起こ

る確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{2^{n-2}}$$

である。

以上[1], [2], [3], [4]は排反な事象であるから、

$$\begin{aligned} P_{n-3} &= \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} \\ &= \frac{6}{2^{n-1}} \\ &= \frac{3}{2^{n-2}} \end{aligned}$$

である。最後に、 $n-3$ 回以上連続して表が出る確率は $P_n+P_{n-1}+P_{n-2}+P_{n-3}$ で与えられ、 P_n は n

回連続して表が出る確率、すなわち $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$ に等しいことから、

$$\begin{aligned} P_n+P_{n-1}+P_{n-2}+P_{n-3} &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{5}{2^n} + \frac{3}{2^{n-2}} \\ &= \frac{1+2+5+3\cdot 4}{2^n} \\ &= \frac{20}{2^n} \\ &= \frac{5}{2^{n-2}} \end{aligned}$$

となる。

(4)

$1\leq k\leq \frac{n}{2}$ とする。このとき、 P_{n-k} を(3)で P_{n-3} を求めたときと同様に求める。ここで、 $1\leq k$

$\leq \frac{n}{2}$ であるから、 n 回の硬貨を投げるとき $n-k$ 回表が連続することは2回以上起こらない。

[1] 表がちょうど $n-k$ 回連続するのが第1回から第 $n-k$ 回の場合

第1回から第 $n-k$ 回に表が、第 $n-k+1$ 回に裏が出ればよく、残りはどちらでもよい。こ

れが起こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}=\frac{1}{2^{n-k+1}}$$

である。

[2] 表がちょうど $n-k$ 回連続するのが第 l 回から第 $n-k+l-1$ 回の場合($l=2, 3, \dots, k$)

連続する表の1つ前後に裏が出ればよく、残りはどちらでもよい。これが起こる確率は

$$(k-2+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+2}=\frac{k-1}{2^{n-k+2}}$$

である。

[3] 表がちょうど $n-k$ 回連続するのが第 $k+1$ 回から第 n 回の場合

第 k 回に表が、第 $k+1$ 回から第 n 回に表が出ればよく、残りはどちらでもよい。これが起

こる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}=\frac{1}{2^{n-k+1}}$$

である。

以上[1], [2], [3]は排反な事象であるから、

$$\begin{aligned} P_{n-k} &= \frac{1}{2^{n-k+1}} + \frac{k-1}{2^{n-k+2}} + \frac{1}{2^{n-k+1}} \\ &= \frac{2+k-1+2}{2^{n-k+2}} \\ &= \frac{k+3}{2^{n-k+2}} \end{aligned}$$

となる。

【3】

【解答】

(1)	ア			
	$\frac{1}{2}$			
(2)	イ	ウ	エ	オ
	$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
(3)	カ	キ		
	$\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$		
(4)	ク	ケ	コ	
	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{1-y^2}$	$\frac{\pi^2}{4}$	

【解説】

(1)

$0 < x < 1$ の範囲において、 $\sqrt{1-x^2} > 0$ であるから、方程式 $f(x) = g(x)$ は両辺を $\sqrt{1-x^2}$ で割ること

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} &= 2x\sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow 1 &= 2x \\ \therefore x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と解くことができる。

(2)

関数 $f(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left\{ (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\}' \\ &= \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)' \\ &= \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

であり、この結果を用いて関数 $g(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \{ 2x \cdot f(x) \}' \\ &= 2x \cdot f'(x) + (2x)' f(x) \\ &= \frac{-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

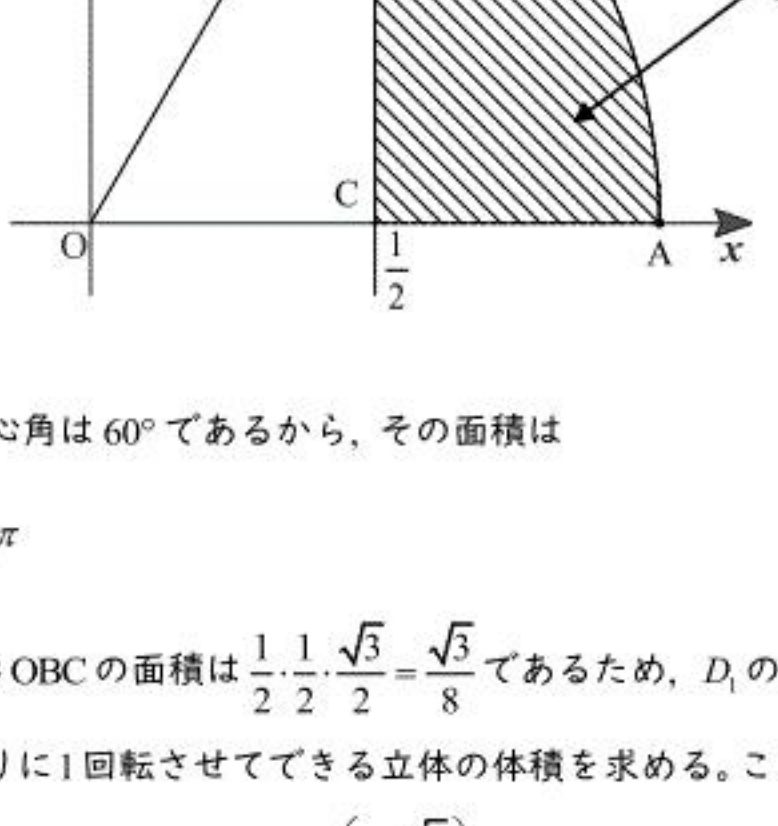
である。よって $g'(x) = 0$ であるとき、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となることから、 $g(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$g'(x)$		+	0	-	/
$g(x)$	0	/	1	\	0

したがって、関数 $g(x)$ は、 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値1をとる。

(3)

$0 \leq x \leq 1$ の範囲で $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ は、半径1の四半円の円周を表す。また、直線 $x = \frac{1}{2}$ と曲線 $y = f(x)$ の交点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。そこで $A(1, 0)$ 、 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 、 $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ とおくと、 D_1 は次のように扇形OABから三角形OBCを除いた部分に等しい。

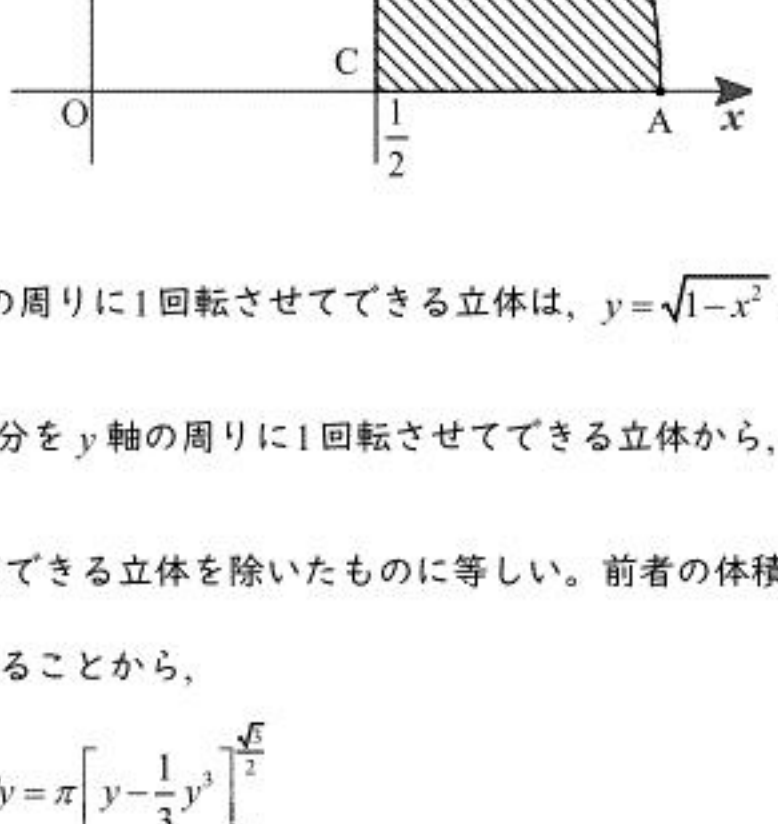


さて、扇形OABの中心角は 60° であるから、その面積は

$$\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{60}{360} = \frac{1}{6}\pi$$

である。また、三角形OBCの面積は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ であるため、 D_1 の面積は $\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8}$ となる。

次に、 D_1 を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求める。この立体は、 y 座標が $0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる部分に存在する。ここで $D\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおく。



このとき、 D_1 を y 軸の周りに1回転させてできる立体は、 $y = \sqrt{1-x^2}$ 、 x 軸、 y 軸および

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに1回転させてできる立体から、長方形OCBDを y 軸の周りに1回転させてできる立体を除いたものに等しい。前者の体積は、 $y = \sqrt{1-x^2}$ が

$x^2 = 1 - y^2$ と変形されることから、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi (1 - y^2) dy &= \pi \left[y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \pi \end{aligned}$$

であり、後者は半径OC、高さODの円柱となるため、その体積は $\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} \pi$ である。

したがって、求める体積は

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} \pi - \frac{\sqrt{3}}{8} \pi = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi$$

となる。

(4)

$0 \leq x \leq 1$ の範囲で $g(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ はつねに0以上であるから、 D_2 の面積は $\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx$ と表される。ここで $t = 1 - x^2$ とおくと $dt = -2x dx$ であり、

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & \rightarrow 1 \\ t & 1 & \rightarrow 0 \end{array}$$

であるから、 D_2 の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx &= -\int_1^0 \sqrt{t} dt \\ &= \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

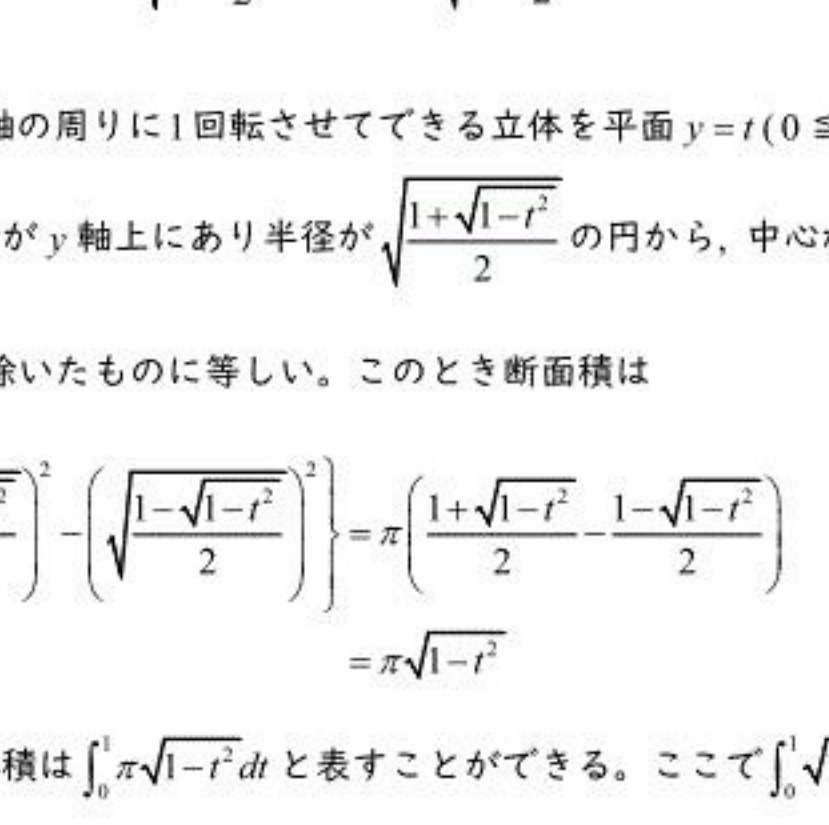
となる。次に、 $y = 2x\sqrt{1-x^2}$ のとき、 x^2 を y の式で表す。(1)の増減表より、 $0 \leq x \leq 1$ のとき $y = 2x\sqrt{1-x^2}$ は $0 \leq y \leq 1$ の範囲を動くことに注意して、

$$\begin{aligned} y &= 2x\sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow y^2 &= 4x^2(1-x^2) \\ \Leftrightarrow 4(x^2)^2 - 4x^2 + y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x^2)^2 - 4x^2 + 1 &= 1 - y^2 \\ \Leftrightarrow (2x^2 - 1)^2 &= 1 - y^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 1 &= \pm \sqrt{1 - y^2} \\ \therefore x^2 &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{2} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、(1)の増減表より、 $y = g(x)$ のグラフは y 座標が $0 \leq y \leq 1$ の部分に存在するため、グラフ $y = g(x)$ と直線 $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$) との交点の x 座標は、 $\textcircled{1}$ より

$$x = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-t^2}}{2}} \quad (\because x \geq 0)$$

となる。

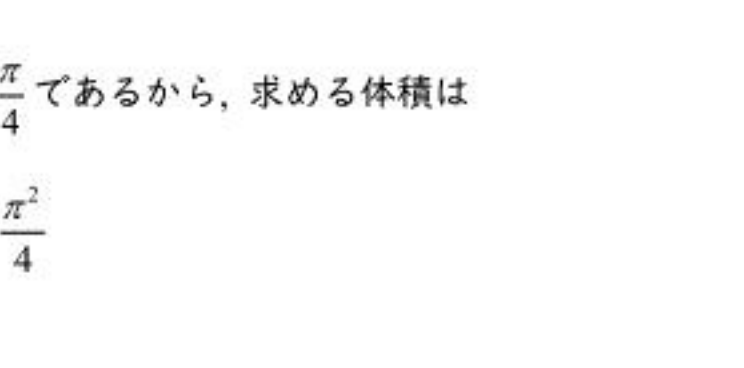


したがって、 D_2 を y 軸の周りに1回転させてできる立体を平面 $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$) で切断したときの切断面は、中心が y 軸上にあり半径が $\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{2}}$ の円から、中心が y 軸上にあり半径

が $\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{2}}$ の円を除いたものに等しい。このとき断面積は

$$\begin{aligned} \pi \left\{ \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{2}} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{2}} \right)^2 \right\} &= \pi \left(\frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{2} - \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{2} \right) \\ &= \pi \sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

となるから、求める体積は $\int_0^1 \pi \sqrt{1-t^2} dt$ と表すことができる。ここで $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ は、次のような四半円の面積に等しい。



すなわち $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$ であるから、求める体積は

$$\int_0^1 \pi \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi^2}{4}$$

である。

【4】

(1)

直線 ℓ の方程式を変形すると $mx - y + 1 = 0$ であり、円 C の中心は $(0, 0)$ である。よって、円の中心と直線 ℓ との距離を d とすると、

$$d = \frac{|m \cdot 0 - 0 + 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

となる。そこで円 C と直線 ℓ が共有点をもつための条件は、距離 d が円の半径である $\frac{3}{5}$ 以下

になることから、求める条件は

$$\frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{3}{5} \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{9}{25} (m^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow m^2 \geq \frac{16}{9}$$

$$\therefore m \leq -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \leq m$$

である。

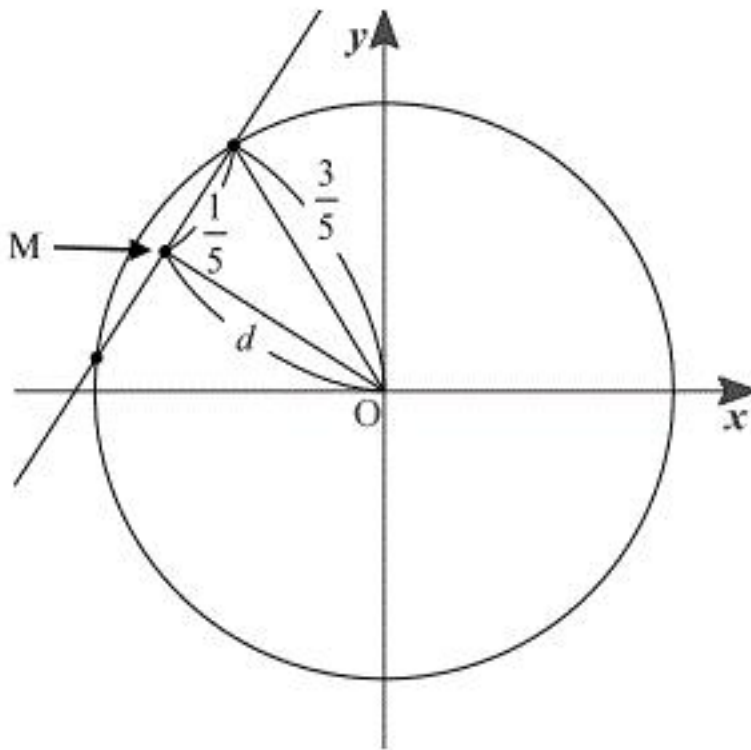
$$(\text{答}) \quad m \leq -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \leq m$$

(2)

円 C と直線 ℓ が相異なる2点で交わるための条件は、距離 d が円の半径である $\frac{3}{5}$ より小さくなることである。すなわち、(1)と同様に考えて

$$m < -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} < m \quad \dots \textcircled{1}$$

である。さて、原点 O から直線 ℓ に下ろした垂線の足を点 M とするとき、これは円 C と直線 ℓ の2つの共有点の中点となり、 $OM = \frac{1}{5}$ である。



そこで、3点 M 、点 O および円 C と直線 ℓ の共有点の1つを頂点とする直角三角形に三平方の定理を用いて、

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + d^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m^2 + 1} = \frac{8}{25}$$

$$\Leftrightarrow m^2 = \frac{17}{8}$$

$$\therefore m = \pm \frac{\sqrt{34}}{4}$$

であり、いずれも条件①を満たす。

$$(\text{答}) \quad m = \pm \frac{\sqrt{34}}{4}$$

(3)

$P(X, Y)$ 、 $A(s, t)$ とおく。このとき、点 A は円 C 上にあるから、

$$s^2 + t^2 = \frac{9}{25} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立する。また、点 P は線分 AB の中点であるから、

$$\frac{s+2}{2} = X \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{t}{2} = Y \quad \dots \textcircled{4}$$

が成立する。③より $s = 2X - 2$ 、④より $t = 2Y$ であり、これらを②に代入して s, t を消去すると、

$$(2X - 2)^2 + (2Y)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow 4(X - 1)^2 + 4Y^2 = \frac{9}{25}$$

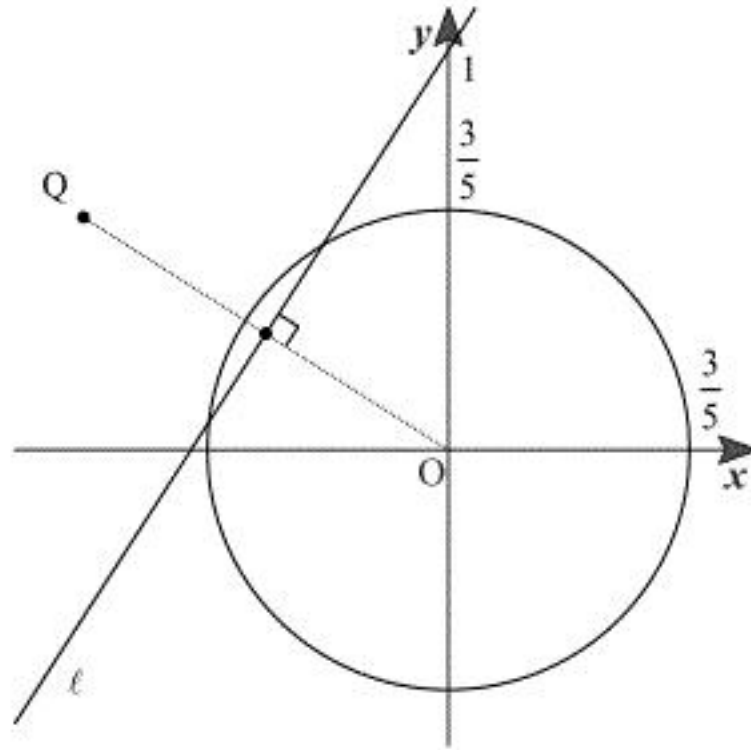
$$\Leftrightarrow (X - 1)^2 + Y^2 = \frac{9}{100}$$

が得られる。よって、点 P は中心 $(1, 0)$ 、半径 $\frac{3}{10}$ の円上にある。逆に、この図形上の任意の点は問題の条件を満たす。

$$(\text{答}) \quad \text{中心}(1, 0), \text{半径} \frac{3}{10} \text{ の円}$$

(4)

まず、点 Q の座標を求める。



点 Q は直線 ℓ に関して原点 O と対称であるから、点 Q は原点 O を通り直線 ℓ に垂直な直線上に存在するところ、この直線方向ベクトルは $(-m, 1)$ である。また、線分 OQ の長さは点 O

と直線 ℓ との距離 d の2倍であり、 $OQ = \frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}}$ と分かる。したがって、点 Q の座標は

$$\frac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}} (-m, 1)$$

$$= \left(-\frac{2m}{m^2 + 1}, \frac{2}{m^2 + 1} \right)$$

と表すことができる。次に $Q(X, Y)$ において、点 Q の軌跡を考える。このとき

$$X = -\frac{2m}{m^2 + 1} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$Y = \frac{2}{m^2 + 1} \quad \dots \textcircled{6}$$

を満たす実数 m が存在する。 $Y > 0$ が成り立つので、⑤を⑥で辺々割ることによって

$$\frac{X}{Y} = -m$$

が得られる。これと⑥から m を消去して、

$$Y = \frac{2}{\left(-\frac{X}{Y}\right)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow X^2 + Y^2 - 2Y = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + (Y - 1)^2 = 1$$

が成り立つ。したがって点 Q は、方程式 $X^2 + (Y - 1)^2 = 1$ で表される図形の $Y > 0$

の部分、すなわち半径1、中心 $(0, 1)$ の円のうち原点を除いた図形上にある。逆に、この図形上の任意の点は問題の条件を満たす。

$$(\text{答}) \quad Q\left(-\frac{2m}{m^2 + 1}, \frac{2}{m^2 + 1}\right), \text{点 } Q \text{ の軌跡は半径1、中心}(0, 1) \text{ の円のうち原点を除いた部分}$$