

〔1〕

〔解答〕

(1)		ア	イ	ウ
		$4\sqrt{2}$	8	$8(\sqrt{2}-1)$
(2)	(i)	エ	オ	カ
		$\frac{2}{27}$	$\frac{17}{27}$	$\frac{3}{8}$
	(ii)	キ		
		$\frac{70}{729}$		

〔解説〕

(1)

辺 AC の長さを x とおくと、 $\triangle ABC$ について余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$$

$$\Leftrightarrow (4\sqrt{5})^2 = 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4\sqrt{2}x - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4\sqrt{2})(x + 8\sqrt{2}) = 0$$

となり、 $AC > 0$ より $AC = 4\sqrt{2}$ となる。よって、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8$$

である。また、角の二等分線の公式より、

$$\begin{aligned} BD : DC &= AB : AC \\ &= 1 : \sqrt{2} \end{aligned}$$

であるので $\triangle ABD$ の面積は、

$$8 \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 8(\sqrt{2} - 1)$$

となる。

(2)(i)

1 回のゲームにおいて a, b, c の組は全部で $3^3 = 27$ 通り存在し、これらは同様に確からしい。

$X = 5$ となるとき、とり得る (a, b, c) は $(1, 2, 2), (1, 1, 3)$ である。それぞれ $\frac{1}{27}$ の確率で起こ

り、互いに背反であるので、求める確率は $\frac{2}{27}$ となる。同様に、 $X = 3, 4, 6, 7, 8, 9$ となる確率は

それぞれ $\frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \frac{2}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}$ であるから、 $X = 0$ となる確率は

$$1 - \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} \right) = \frac{17}{27}$$

である。また、 $b = 3$ となる (a, b, c) は $(1, 3, 3), (2, 3, 3), (3, 3, 3)$ の 3 通りのみ存在し、これらはすべて $X \geq 5$ であるから、条件付き確率は

$$\frac{\frac{3}{27}}{\frac{17}{27}} = \frac{3}{17}$$

となる。

(2)(ii)

2 回の得点合計が 7 となるとき、点数は 3 点が 1 回と 4 点が 1 回または 0 点が 1 回と 7 点が 1 回となるので、求める確率は

$$2 \cdot \left(\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{27} + \frac{2}{27} \cdot \frac{17}{27} \right) = \frac{70}{729}$$

となる。

【2】

【解答】

(1)	(i)	ア			
		6			
	(ii)	イ			
		768			
	(iii)	ウ			
		336			
(2)	(i)	エ	オ	カ	
		$\frac{N-n}{N-1}$	-3	$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$	
	(ii)	キ			
		$\frac{3}{16}-\frac{3+4n}{16}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$			

【解説】

(1)(i)

二項定理より、求める係数は

$${}_4C_2=6$$

となる。

(1)(ii)

ここでは、 y^3 となる必要があることから $(x^2-4xy)^3$ において x^3y^3 となる項が必要となること
がわかり、二項定理とあわせて、求める係数は、

$$-3\cdot 4^3\cdot (-4)\cdot {}_3C_3=768$$

となる。

(1)(iii)

同様に、 $6(x^2-4xy)^2(-3y^2)^2$ において x^3y^5 となる項の係数を考えると、 $(x^2-4xy)^2$ において
 x^3y となる項の係数について考える必要があるとわかる。よって、

$$6\cdot {}_2C_1\cdot (-4)\cdot (-3)^2=-432$$

となる。(ii)より、求める係数は、

$$768-432=336$$

となる。

(2)(i)

初項 a 、 $a_N=0$ であることより、公差 d とすると、 $a+d(N-1)=0$ とおくことができる。よっ
て、 $d=\frac{-a}{N-1}$ である。よって、一般項は

$$\begin{aligned}a_n&=a+d(n-1)\\&=a-a\left(\frac{n-1}{N-1}\right)\\&=a\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\end{aligned}$$

となる。ここで、一般項より、

$$\begin{aligned}a_{28N-27}&=a\left(\frac{-27N+27}{N-1}\right)\\&=-27a\end{aligned}$$

である。ここで数列 $\{b_n\}$ の公差を r とすると、

$$b_n=ar^{n-1}$$

である。よって、 $b_4=ar^3$ である。

$$a_{28N-27}=b_4$$

より、

$$r=-3$$

となる。

(2)(ii)

$-3+a=0$ より、 $a=3$ である。ここで、先ほど求めた一般項より、

$$b_n=3\cdot (-3)^{n-1}$$

であるとわかる。ゆえに、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n\frac{1}{b_k}&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^n\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\\&=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{4}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $I=\sum_{k=1}^n\frac{k}{b_k}$ とすると、

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{n}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\-\frac{1}{3}I&=-\frac{1}{9}+\frac{2}{27}-\cdots+\frac{n}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}I-\left(-\frac{1}{3}\right)I&=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\cdots+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{n}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\\&=\frac{1}{3}\left\{\sum_{k=1}^n\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}-n\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{n}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

となり、ゆえに

$$I=\frac{3}{16}-\frac{3+4n}{16}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

となる。

【3】

(1)

$$2y + x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \geq y$$

であり,

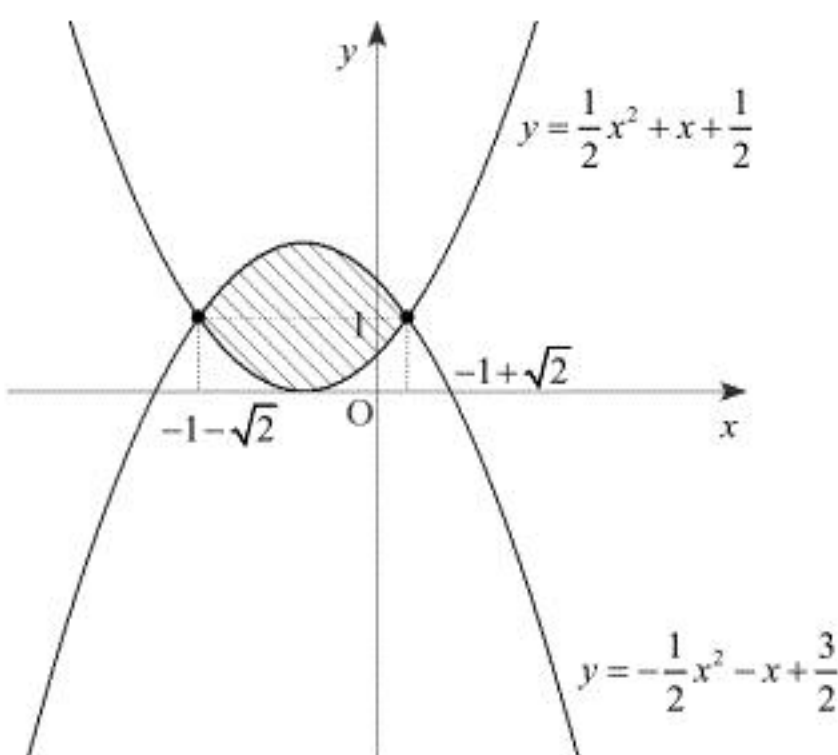
$$-2y + x^2 + 2x + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \leq y$$

であるのでこの2本の不等式について考えていく。まず、曲線の交点の x 座標について考え

ると、 $-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ となるとき、すなわち、 $x^2 + 2x - 1 = 0$ の解となるときであ

る。つまり、 $x = -1 \pm \sqrt{2}$ のときである。よって、面積を求める部分は下図のようになる。



よって求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} (x^2 + 2x - 1) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x \right]_{-1-\sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) 図：前図(境界を含む), 面積： $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

(2)

$a^2 + 2(1-y)a - x^2 - 2x \geq 0$ が常に成り立てばよいから、 a についての2次方程式

$a^2 + 2(1-y)a - x^2 - 2x = 0$ の判別式を D とおくと条件は

$$\frac{D}{4} \leq 0$$

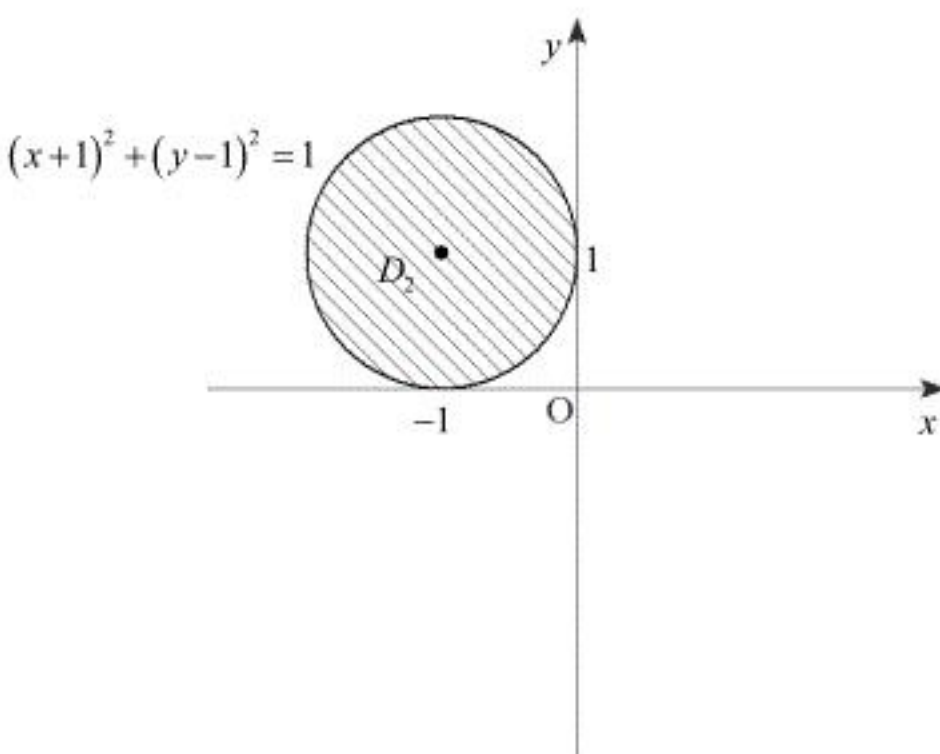
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + (y-1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

となる。よって、 D_2 の面積は

$$1^2 \cdot \pi = \pi$$

である。



(答) 図：前図(境界を含む), 面積： π

(3)

$y - 2x = k$ とおく。この k が最大値となるのは、この直線が円に接しているときかつ、その中でも x の値が小さいときである。ここで、この直線の法線のうち、円の中心を通るものの方

程式は $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ である。法線と円の交点は先ほどの円の方程式に代入すると

$$(x+1)^2 + \left\{ \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) - 1 \right\}^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}(x+1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

となり、 y 座標は

$$y = 1 \mp \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\text{複号同順})$$

となる。よって、 $x = -1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$ のときに最大値を取り、その値は

$$\begin{aligned} y - 2x &= 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} - 2 \left(-1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \\ &= 3 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

(答) $3 + \sqrt{5}$