

[1]

[解答]

| (1) |       | ア               | イ                      | ウ        | エ             |
|-----|-------|-----------------|------------------------|----------|---------------|
|     |       | 1               | $\frac{-3a^2+2a+1}{4}$ | $-a^2+a$ | $\frac{1}{3}$ |
| (2) | (i)   | オ               |                        |          |               |
|     |       | $\frac{19}{27}$ |                        |          |               |
|     | (ii)  | カ               |                        |          |               |
|     |       | $\frac{16}{81}$ |                        |          |               |
|     | (iii) | キ               |                        |          |               |
|     |       | $\frac{44}{81}$ |                        |          |               |

[解説]

(1)

$$y=-x^2+(a+1)x-a^2\Leftrightarrow y=-\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{-3a^2+2a+1}{4}$$

であるから、 $y=-x^2+(a+1)x-a^2$ の軸は $x=\frac{a+1}{2}$ であり、 $a>0\Leftrightarrow\frac{a+1}{2}>\frac{1}{2}$ だから、軸が1より大きい小さいかで場合分けを行う。 $y=f(x)$ とおく。

[1]  $\frac{a+1}{2}>1$ 、すなわち $a>1$ のとき

$-1\leq x\leq 1$ において $y=f(x)$ は単調増加である。よって $f(x)$ の最大値は

$$f(1)=-a^2+a$$

である。

[2]  $\frac{a+1}{2}\leq 1$ 、すなわち $0<a\leq 1$ のとき

$\frac{1}{2}<\frac{a+1}{2}\leq 1$ であるので、 $-1\leq x\leq 1$ における $f(x)$ の最大値は

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right)=\frac{-3a^2+2a+1}{4}$$

である。

以上[1],[2]より、最大値を $a$ の関数と考え、これを $g(a)$ とおくと

$$g(a)=\begin{cases}\frac{-3a^2+2a+1}{4}&(0<a\leq 1\text{のとき})\\-a^2+a&(a>1\text{のとき})\end{cases}$$

である。ここで、 $g(a)$ の最大値を考える。 $0<a\leq 1$ のとき

$$\begin{aligned}g(a)&=-\frac{3}{4}\left(a^2-\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}\right)\\&=-\frac{3}{4}\left\{\left(a-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right\}\end{aligned}$$

より $g(a)$ は $a=\frac{1}{3}$ で最大となる。また、 $a>1$ のとき

$$g(a)=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

より、任意の $a$ について、 $g(1)>g(a)$ となる。以上より、 $g(a)$ は $a=\frac{1}{3}$ で最大値をとる。

(2) (i)

1回のゲームでの玉の取り出し方は

$$3\cdot 3=9\text{ (通り)}$$

ある。ここで、大当たりが出るのはA,Bどちらも同じ数字であり、数字の出方は3通りあるので、その確率は

$$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

であり、当たりが出るのは

$$(\text{Aから取り出した玉, Bから取り出した玉})=(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$$

の4通りであるから、その確率は $\frac{4}{9}$ である。よって、はずれが出る確率は

$$1-\frac{1}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$$

である。ここで、大当たりが少なくとも1回出る事象は、大当たりが1回も出ない事象の余事象であるから、求める確率は

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}$$

である。

(ii)

大当たり、当たり、はずれがどの順番で出るかが

$$3!=6\text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は

$$6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{9}=\frac{16}{81}$$

である。

(iii)

当たりと大当たりがそれぞれ少なくとも1回でるとき、残り1回はどの結果でもよい。以下、残り1回で何が出るかで場合分けをする。

[1] 残り1回で大当たりが出るとき

当たり、大当たりの出る順番が

$$\frac{3!}{2!}=3\text{ (通り)}$$

あるので、この確率は

$$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{27}$$

である。

[2] 残り1回で当たりが出るとき

当たり、大当たりの出る順番が

$$\frac{3!}{2!}=3\text{ (通り)}$$

あるので、この確率は

$$3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{16}{81}$$

である。

[3] 残り1回ではずれが出るとき

(ii)より、この確率は $\frac{16}{81}$ である。

以上[1],[2],[3]より求める確率は

$$\frac{4}{27}+\frac{16}{81}+\frac{16}{81}=\frac{44}{81}$$

である。

[2]

[解答]

|     |      |                                  |                        |                       |              |
|-----|------|----------------------------------|------------------------|-----------------------|--------------|
| (1) |      | <div>ア</div>                     | <div>イ</div>           | <div>ウ</div>          | <div>エ</div> |
|     |      | $t^2+t-\frac{1}{4}-\frac{1}{4t}$ | $\frac{1}{3}$          | $\frac{\sqrt{3}}{3}$  | $\sqrt{3}$   |
| (2) | (i)  | <div>オ</div>                     | <div>カ</div>           | <div>キ</div>          |              |
|     |      | $-\frac{1}{2}$                   | $\frac{2}{\sqrt{11}}$  | $\frac{1}{\sqrt{11}}$ |              |
|     | (ii) | <div>ク</div>                     | <div>ケ</div>           | <div>コ</div>          |              |
|     |      | $\frac{20}{\sqrt{11}}$           | $\frac{10}{\sqrt{11}}$ | $5\sqrt{11}$          |              |

[解説]

(1)  
 $x>0, x\neq 1$  より,  $t$  は 0 以外のすべての実数をとる。

$$\log_3 \frac{x}{3} = t-1, \log_3 x^3 = 3\log_3 x = 3t$$

であり, 底の変換を行うと

$$\log_{\sqrt{3}} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 \sqrt{3}} = 2t$$

となるから,  $y$  を  $t$  の式で表すと

$$\begin{aligned} y &= (t-1)^2 + 3t - \frac{1}{4t} - \frac{4}{5} \\ &= t^2 + t - \frac{1}{4} - \frac{1}{4t} \end{aligned}$$

となる。ここで,  $y$  を因数分解すると

$$\begin{aligned} y &= t^2 + t - \frac{1}{4} - \frac{1}{4t} \\ &= (t+1)\left(t-\frac{1}{4t}\right) \\ &= \frac{(t+1)(2t+1)(2t-1)}{4t} \end{aligned}$$

となるので,  $y=0$  を満たす  $t$  は

$$t=-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

と求まる。したがって,  $t=\log_3 x \Leftrightarrow x=3^t$  であるから, それぞれ  $t$  を代入して

$$x=\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}$$

と求まる。

(2)(i)  
 $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=1$  であることから,  $|\vec{a}-2\vec{b}|=3$  の両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned} |\vec{a}-2\vec{b}|^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得る。ここで,  $k, l$  を実数として  $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$  とおく。このとき  $\vec{b}\cdot\vec{c}=0, \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}, |\vec{b}|=1$  であることから,

$$\begin{aligned} \vec{b}\cdot\vec{c} &= k\vec{a}\cdot\vec{b} + l|\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= -\frac{k}{2} + l \\ \Leftrightarrow k &= 2l \end{aligned}$$

を得る。よって,

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= |2l\vec{a}+l\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 1 &= l^2\left(4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2\right) \\ \Leftrightarrow 1 &= 11l^2 \\ \therefore l &= \pm\frac{1}{\sqrt{11}} \end{aligned}$$

が得られ, このとき

$$(k, l) = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

となる。ここで,

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = k|\vec{a}|^2 + l\vec{a}\cdot\vec{b} = 3k - \frac{l}{2}$$

であり,  $\vec{a}\cdot\vec{c}>0$  を満たすのは

$$(k, l) = \left(\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$$

のみである。よって

$$\vec{c} = \frac{2}{\sqrt{11}}\vec{a} + \frac{1}{\sqrt{11}}\vec{b}$$

と表せる。

(ii)  
 $\vec{x}\cdot\vec{c} = \frac{2}{\sqrt{11}}\vec{x}\cdot\vec{a} + \frac{1}{\sqrt{11}}\vec{x}\cdot\vec{b}$  を  $0\leq \vec{x}\cdot\vec{c}\leq 10$  に代入すると

$$-\frac{1}{\sqrt{11}}\vec{x}\cdot\vec{b}\leq \frac{2}{\sqrt{11}}\vec{x}\cdot\vec{a}\leq 10-\frac{1}{\sqrt{11}}\vec{x}\cdot\vec{b}$$

とかけるので,  $0\leq \vec{x}\cdot\vec{b}\leq 3$  より,  $\vec{x}\cdot\vec{a}$  は  $\vec{x}\cdot\vec{b}=0$  のとき最大値

$$10\times\frac{\sqrt{11}}{2}=5\sqrt{11}$$

をとる。このとき

$$\begin{aligned} \vec{x}\cdot\vec{a} &= 5\sqrt{11} \\ \Leftrightarrow s|\vec{a}|^2 + t\vec{a}\cdot\vec{b} &= 5\sqrt{11} \\ \Leftrightarrow 3s - \frac{t}{2} &= 5\sqrt{11} \end{aligned}$$

であり, また

$$\begin{aligned} \vec{x}\cdot\vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow s\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{s}{2} + t &= 0 \end{aligned}$$

であるから, これらを連立して

$$s = \frac{20}{\sqrt{11}}, t = \frac{10}{\sqrt{11}}$$

と求まる。

[3]

[解答]

(1)

$$y = x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

であり、

$$x^2 + ax + a^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 > 0$$

となることから、

$$x \geq a \text{ のとき, } |x^3 - a^3| = x^3 - a^3$$

$$x < a \text{ のとき, } |x^3 - a^3| = a^3 - x^3$$

である。よって、 $0 \leq a \leq 1$  のとき、

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^a (a^3 - x^3) dx + \int_a^1 (x^3 - a^3) dx \\ &= \left[ a^3 x - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^a + \left[ \frac{1}{4} x^4 - a^3 x \right]_a^1 \\ &= \frac{3}{2} a^4 - a^3 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であり、 $a \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 -(x^3 - a^3) dx \\ &= -\left[ \frac{1}{4} x^4 - a^3 x \right]_0^1 \\ &= a^3 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって、求める答えは

$$f(a) = \begin{cases} \frac{3}{2} a^4 - a^3 + \frac{1}{4} & (0 \leq a \leq 1 \text{ のとき}) \\ a^3 - \frac{1}{4} & (a \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

(答) 前表

(2)

$0 \leq a \leq 1$  のとき

$$f'(a) = 6a^3 - 3a^2 = 3a^2(2a - 1)$$

であり、 $f'(a) = 0$  を満たすのは、 $a = 0, \frac{1}{2}$  である。また、 $a \geq 1$  のとき

$$f'(a) = 3a^2$$

であり、このとき  $a \geq 1$  でつねに  $f'(a) > 0$  となるから、 $f(a)$  の増減表は以下のようになる。

|         |               |            |                |            |               |            |            |
|---------|---------------|------------|----------------|------------|---------------|------------|------------|
| $a$     | 0             | ...        | $\frac{1}{2}$  | ...        | 1             | ...        | $(\infty)$ |
| $f'(a)$ | 0             | -          | 0              | +          | +             | +          |            |
| $f(a)$  | $\frac{1}{4}$ | $\searrow$ | $\frac{7}{32}$ | $\nearrow$ | $\frac{3}{4}$ | $\nearrow$ | $(\infty)$ |

よって、 $\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = \infty$  であることと合わせて、 $f(a)$  は  $a = \frac{1}{2}$  のとき最小値  $\frac{7}{32}$  をとり、最大値は存在しない。

(答)  $a = \frac{1}{2}$  のとき最小値  $\frac{7}{32}$ ，最大値は存在しない。