

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	-8	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
(2)	オ	カ	キ	
	692	9	2.2	

【解説】

(1)

与えられた連立不等式を解くと、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + x - 56 < 0 \\ x^2 - 8x - 9 > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)(x-7) < 0 \\ (x+1)(x-9) > 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -8 < x < 7 \\ x < -1, 9 < x \end{cases} \\ & \therefore -8 < x < -1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が得られる。①を満たす x に対して、 $x^2 - ax - 6a^2 > 0$ が成り立つための条件は、不等式

$$x^2 - ax - 6a^2 > 0 \Leftrightarrow (x+2a)(x-3a) > 0 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の解が、①を含むことである。

[1] $a \geq 0$ のとき

②を解くと、

$$x < -2a, 3a < x$$

となる。これが①を含むような a の範囲は

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$$

である。

[2] $a < 0$ のとき

②を解くと、

$$x < 3a, -2a < x$$

となる。これが①を含むような a の範囲は

$$-\frac{1}{3} \leq a < 0$$

である。

以上[1], [2]より、求める定数 a の範囲は、

$$-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

である。

(2)

10 人の点数の平均値を $\overline{x}$ 、10 人の点数の二乗の平均値を $\overline{x^2}$ とすると、

$$\begin{aligned} & \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 5.2 \\ & \Leftrightarrow \overline{x^2} - 8^2 = 5.2 \\ & \therefore \overline{x^2} = 69.2 \end{aligned}$$

が得られるから、

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i)^2 = 10\overline{x^2} = 692$$

である。また、修正後の10 人の点数の平均値は、

$$\frac{8 \cdot 10 + \{(10-5) + (9-4)\}}{10} = 9$$

であり、修正後の生徒の点数の二乗の平均値は

$$\frac{692 + \{(10^2 - 5^2) + (9^2 - 4^2)\}}{10} = 83.2$$

であるから、これらを用いると、修正後の分散は

$$83.2 - 9^2 = 2.2$$

となることがわかる。

【2】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ
	$\frac{(5-x)^2}{x-1}$	2	3
(2)	(i)	エ	オ
		$(s-1, 3s-2, 3s)$	$(st-t+1, 3st-2t, 3st)$
	(ii)	カ	キ
		$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{23}$

【解説】

(1)

対数の真数条件より

$$\begin{cases} 5-x>0 \\ x-1>0 \\ t>0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<5 \\ t>0 \end{cases}$$

のもとで考える。与式の両辺の対数の底を2に揃えると、

$$\log_2(5-x)+\log_{\frac{1}{4}}(x-1)=\log_4 t$$
$$\Leftrightarrow \log_2(5-x)+\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 \frac{1}{4}}=\frac{\log_2 t}{\log_2 4}$$
$$\Leftrightarrow \log_2(5-x)-\frac{\log_2(x-1)}{2}=\frac{\log_2 t}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\log_2(5-x)-\log_2(x-1)=\log_2 t$$
$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(5-x)^2}{x-1}=\log_2 t$$

と変形できるため、

$$t=\frac{(5-x)^2}{x-1}$$

と表せる。また、

$$9'-28\cdot 3'^{-1}+3=0$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot 9'-28\cdot 3'+9=0$$
$$\Leftrightarrow 3\cdot (3')^2-28\cdot 3'+9=0$$
$$\Leftrightarrow (3\cdot 3'-1)(3'-9)=0$$
$$\therefore 3'=\frac{1}{3}, 9$$

であるから、

$$t=-1, 2$$

となるが、真数条件より $t>0$ であったから、このとき

$$t=2$$

である。したがって、

$$2=\frac{(5-x)^2}{x-1}$$
$$\Leftrightarrow 2x-2=(5-x)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-12x+27=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x-9)=0$$
$$\therefore x=3, 9$$

であり、真数条件より、

$$x=3$$

である。

(2)(i)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= (1-s)\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OC} \\ &= (s, 3s-2, 3s) \end{aligned}$$

と表せるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA} \\ &= (s-1, 3s-2, 3s) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH} \\ &= \overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AD} \\ &= (st-t+1, 3st-2t, 3st) \end{aligned}$$

と表せる。

(ii)

直線 OH が平面 α の垂線となる条件は $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AC}$ である。よって、 $\overrightarrow{OH}$ と $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ との内積が0となるような s, t を求める。ここで、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} = (-1, -2, 0) \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA} = (0, 1, 3) \end{aligned}$$

であるから、内積を計算すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} &= -(st-t+1)-2(3st-2t) = -7st+5t-1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} &= (3st-2t)+3\cdot 3st = 12st-2t & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が得られる。これらが0となるような s, t について考えると、②より、

$$\begin{aligned} 12st-2t &= 0 \\ \Leftrightarrow t(6s-1) &= 0 \end{aligned}$$

であるから、 $t=0$ または $s=\frac{1}{6}$ である。ここで、 $t=0$ のときは①の内積が0とならないため

不適である。 $s=\frac{1}{6}$ のとき、①より、

$$\begin{aligned} -7st+5t-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{7}{6}t+5t-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{23}{6}t &= 1 \\ \therefore t &= \frac{6}{23} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、求める値は、 $(s, t) = \left(\frac{1}{6}, \frac{6}{23}\right)$ である。

[3]

(1)

$f(x)$ の導関数は、

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3(a-1)$$

であるから、方程式 $f'(x) = 0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (3a)^2 - 3 \cdot 3(a-1) \\ &= 9(a^2 - a + 1) \\ &= 9 \left\{ \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} \\ &> 0\end{aligned}$$

となるため、すべての実数 a に対して $D > 0$ が成り立つ。したがって、方程式 $f'(x) = 0$ は必ず 2 個の異なる実数解をもつ。

(証明終)

(2)

解と係数の関係より

$$\begin{aligned}p + q &= -\frac{6a}{3} \\ &= -2a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}pq &= \frac{3(a-1)}{3} \\ &= a-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(q-p)^2 &= (p+q)^2 - 4pq \\ &= 4a^2 - 4(a-1) \\ &= 4a^2 - 4a + 4\end{aligned}$$

が得られる。ここで $p < q$ より、 $q - p > 0$ であるから

$$\begin{aligned}q - p &= \sqrt{(q-p)^2} \\ &= 2\sqrt{a^2 - a + 1}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p + q = -2a, \quad pq = a - 1, \quad q - p = 2\sqrt{a^2 - a + 1}$$

(3)

$f(p) - f(q)$ を変形すると

$$\begin{aligned}f(p) - f(q) &= \{p^3 + 3ap^2 + 3(a-1)p + 1\} - \{q^3 + 3aq^2 + 3(a-1)q + 1\} \\ &= p^3 - q^3 + 3a(p^2 - q^2) + 3(a-1)(p - q) \\ &= (p - q)(p^2 + pq + q^2) + 3a(p + q)(p - q) + 3(a-1)(p - q) \\ &= (p - q)\{p^2 + pq + q^2 + 3a(p + q) + 3(a-1)\} \\ &= (p - q)\{(p + q)^2 - pq + 3a(p + q) + 3(a-1)\}\end{aligned}$$

となるから、(2)より、

$$\begin{aligned}f(p) - f(q) &= (p - q)\{(p + q)^2 - pq + 3a(p + q) + 3(a-1)\} \\ &= -2\sqrt{a^2 - a + 1}\{(-2a)^2 - (a-1) + 3a(-2a) + 3(a-1)\} \\ &= -2\sqrt{a^2 - a + 1}(-2a^2 + 2a - 2) \\ &= 4(a^2 - a + 1)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad f(p) - f(q) = 4(a^2 - a + 1)^{\frac{3}{2}}$$

(4)

(1), (3)より、 $g(a) = 4(a^2 - a + 1)^{\frac{3}{2}}$ が最小となるための条件は、 $a^2 - a + 1 (> 0)$ が最小となることであり、

$$a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

であったから、 $g(a)$ が最小になるときの a の値は $\frac{1}{2}$ である。このとき、

$$\begin{aligned}g\left(\frac{1}{2}\right) &= 4\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^3} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a \text{ の値: } \frac{1}{2}, \quad g(a) \text{ の最小値: } \frac{3\sqrt{3}}{2}$$