

[1]

|     |   |                 |
|-----|---|-----------------|
| (1) | ア | $-a-1$          |
|     | イ | $a-1$           |
|     | ウ | $-1$            |
|     | エ | $3$             |
| (2) | オ | $\frac{3}{50}$  |
|     | カ | $\frac{13}{25}$ |
|     | キ | $\frac{8}{13}$  |

|     |      |   |                    |
|-----|------|---|--------------------|
| (1) |      | ア | $\frac{5}{2}$      |
|     |      | イ | $2^{\frac{9}{4}}$  |
|     |      | ウ | $\frac{2187}{128}$ |
| (2) | (i)  | エ | $-\frac{3}{2}$     |
|     |      | オ | 1                  |
|     | (ii) | カ | $\frac{1}{2}$      |
|     |      | キ | -1                 |

[3]

(1) 条件より,

$$\begin{cases} f(-1) = -2a & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ f'(t) = 3t^2 - 4(a-1)t + 2 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②より,  $C$  を定数とすると,

$$f(t) = t^3 - 2(a-1)t^2 + 2t + C$$

ここで,

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 - 2(a-1) - 2 + C \\ &= -2a - 1 + C \end{aligned}$$

であるから, ①より,

$$\begin{aligned} -2a - 1 + C &= -2a \\ C &= 1 \end{aligned}$$

以上から,

$$f(x) = x^3 - 2(a-1)x^2 + 2x + 1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) 2 曲線の共有点の  $x$  座標は,

$$\begin{aligned} x^3 - 2(a-1)x^2 + 2x + 1 &= 2x^2 + ax + 1 \\ x^3 - 2ax^2 - (a-2)x &= 0 \\ x\{x^2 - 2ax - (a-2)\} &= 0 \quad \cdots \cdots (*) \end{aligned}$$

の解である,

$x$  の 2 次方程式を

$$x^2 - 2ax - (a-2) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

とすると,  $(*)$  の解がちょうど 2 個であるための条件は,

(i) ③が  $x=0$  以外の重解をもつ

または

(ii) ③が異なる 2 つの実数解をもち, その一方が  $x=0$

であること.

ここで, ③の判別式を  $D$  とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-a)^2 - 1 \cdot \{-(a-2)\} \\ &= a^2 + a - 2 \\ &= (a+2)(a-1) \end{aligned}$$

(i) の場合

③で  $x=0$  とすると  $a=2$  であるから,

$$a \neq 2$$

また, ③が重解をもつとき,  $\frac{D}{4} = 0$  より,

$$\begin{aligned} (a+2)(a-1) &= 0 \\ a &= -2, 1 \end{aligned}$$

これは  $a \neq 2$  をみたす.

(ii) の場合

③が  $x=0$  を解にもつとき,

$$a=2$$

このとき③は,

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= 0 \\ x &= 0, 4 \end{aligned}$$

となり, 異なる 2 つの実数解をもつ.

以上から, 求める  $a$  の値は

$$a = -2, 1, 2 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) (2)で求めた  $a$  の値のうち, 最も小さいものは

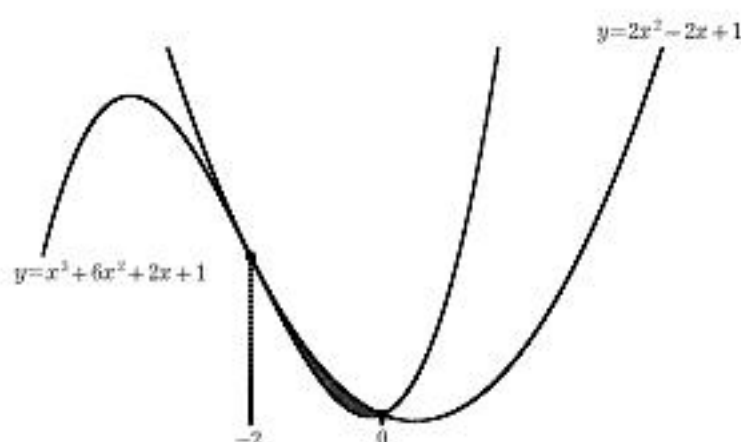
$$a = -2$$

このとき, ③は

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 &= 0 \\ (x+2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

となるから, 2 曲線は  $x=0$  で交わり,  $x=-2$  で接する.

よって, 求める部分は次の図の斜線部のようになる.



ゆえに, その面積は,

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^0 \{(2x^2 - 2x + 1) - (x^3 + 6x^2 + 2x + 1)\} dx \\ &= \int_{-2}^0 (-x^3 - 4x^2 - 4x) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 \right]_{-2}^0 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 16 + \frac{3}{4} \cdot (-8) + 2 \cdot 4 \\ &= \frac{4}{3} \quad \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$