

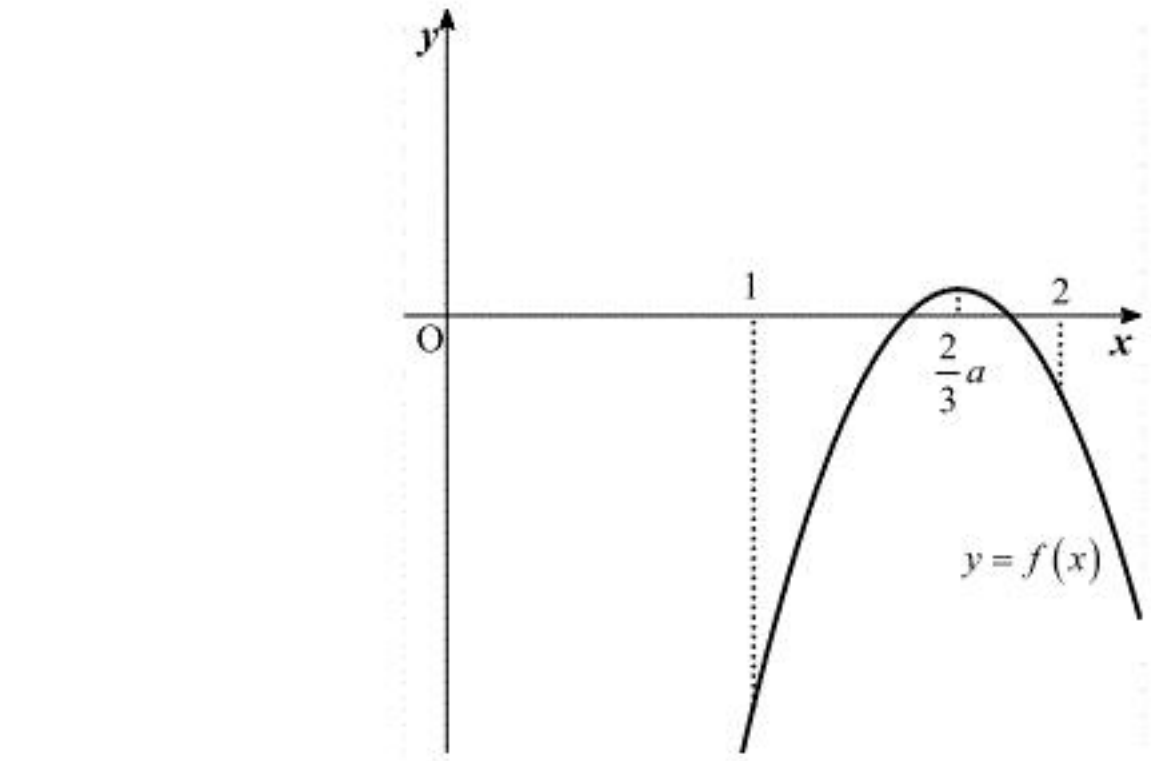
【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	
	$\sqrt{6}$	$4-\sqrt{2}$	$\frac{5}{2}$	
(2)	エ	オ	カ	キ
	x^2-2x-4	$\frac{5}{4}\pi$	$2\sqrt{2}-2$	-5

【解説】

(1) $f(x)=-3x^2+4ax-a^2-2$ とおく。2 次方程式 $f(x)=0$ が $1<x<2$ の範囲に異なる 2 つの実数解を持つための必要十分条件は、 $y=f(x)$ のグラフが $1<x<2$ の範囲において x 軸と異なる 2 つの交点を持つことである。 $y=f(x)$ のグラフが上に凸な放物線であることを考慮すると、次のような図になる。



このようになるのは、放物線の頂点の x 座標が $1<x<2$ の範囲にあり、頂点の y 座標が正であり、 $x=1, 2$ における $f(x)$ の値が負であるときである。まず、 $f(x)$ の式を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 + 4ax - a^2 - 2 \\ &= -3\left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + \frac{1}{3}a^2 - 2 \end{aligned}$$

となるから、放物線の頂点は $\left(\frac{2}{3}a, \frac{1}{3}a^2 - 2\right)$ である。従って、頂点に関する条件は

$$1 < \frac{2}{3}a < 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < a < 3 \quad \dots\dots ①$$

$$\frac{1}{3}a^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow a^2 > 6 \Leftrightarrow a < -\sqrt{6}, \sqrt{6} < a \quad \dots\dots ②$$

となる。また、

$$\begin{aligned} f(1) &< 0 \\ \Leftrightarrow -a^2 + 4a - 5 &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4a + 5 &> 0 \\ \Leftrightarrow (a-2)^2 + 1 &> 0 \end{aligned}$$

となり、これはすべての実数 a で成り立つ。また、

$$\begin{aligned} f(2) &< 0 \\ \Leftrightarrow -a^2 + 8a - 14 &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 8a + 14 &> 0 \\ \Leftrightarrow (a-4)^2 &> 2 \\ \Leftrightarrow a &< 4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2} < a \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &< \sqrt{6} < 3 \\ 3 &< 4 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

であり、

$$3 - (4 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 > 0$$

より $4 - \sqrt{2} < 3 < 4 + \sqrt{2}$ である。また、

$$(4 - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2 = 12 - 8\sqrt{2} = \sqrt{144} - \sqrt{128} > 0$$

より $\sqrt{6} < 4 - \sqrt{2}$ である。以上より、求める a の範囲は①～③の共通範囲を考えて

$$\sqrt{6} < a < 4 - \sqrt{2}$$

である。また、その実数解のうちの 1 つが $\frac{3}{2}$ であるとき、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -a^2 + 6a - \frac{35}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2 - 24a + 35 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a-5)(2a-7) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} - \sqrt{6} &= \frac{\sqrt{25}}{2} - \frac{\sqrt{24}}{2} > 0 \\ (4 - \sqrt{2}) - \frac{5}{2} &= \frac{3}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{9}}{2} - \frac{\sqrt{8}}{2} > 0 \end{aligned}$$

より、 $\sqrt{6} < \frac{5}{2} < 4 - \sqrt{2}$ であるから、 $a = \frac{5}{2}$ は条件を満たす。また、

$$4 - \sqrt{2} < 4 - 1 = 3 < \frac{7}{2}$$

であるから、 $a = \frac{7}{2}$ は条件を満たさない。よって、求める a の値は $a = \frac{5}{2}$ である。

(2)

$x = \sin \theta + \cos \theta$ の両辺を二乗すると

$$\begin{aligned} x^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta &= \frac{x^2 - 1}{2} \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} y &= 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta - 2 \cos \theta - 3 \\ &= 2 \cdot \frac{x^2 - 1}{2} - 2(\sin \theta + \cos \theta) - 3 \\ &= x^2 - 1 - 2x - 3 \\ &= x^2 - 2x - 4 \\ &= (x-1)^2 - 5 \end{aligned}$$

となる。また、

$$x = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

と変形することができ、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ であるから、 x のとる範囲は

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

である。従って、 y は $x = -\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2} - 2$ をとる。また、

$$x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \Leftrightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{5}{4}\pi$$

であるから、このとき $\theta = \frac{5}{4}\pi$ である。また、 y は $x = 1$ のとき最小値 -5 をとる。

[2]

[解答]

(1)	(i)	ア			
		$\frac{25}{216}$			
	(ii)	イ			
		$6^n-5^n-n\cdot5^{n-1}$			
	(iii)	ウ			
		13			
(2)	エ	オ	カ	キ	
	8	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{5}$	

[解説]

(1)

(i)

サイコロ1個を1回投げたとき6の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であり、6以外の目が出る確率は $\frac{5}{6}$ である。よってサイコロ1個を4回投げたとき6の目が2回出る確率は

$${}_4C_2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{216}$$

である。

(ii)

サイコロ1個を n 回投げたとき6の目が1回も出ない確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

である。また、6の目が1回だけ出る確率は

$${}_nC_1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{n\cdot5^{n-1}}{6^n}$$

である。以上より、6の目が少なくとも2回出る確率は

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{n\cdot5^{n-1}}{6^n}=\frac{6^n-5^n-n\cdot5^{n-1}}{6^n}$$

となる。

(iii)

(ii)と同様の考え方により、サイコロ1個を n 回投げたとき6の目が少なくとも1回出る確率は

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

である。よって問題文の条件を式で表すと

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\geq 0.9$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{5}{6}\right)^n\leq 10^{-1}$$

となる。両辺の常用対数をとると、底が1より大きいから

$$\log_{10}\left(\frac{5}{6}\right)^n\leq\log_{10}10^{-1}$$

$$\Leftrightarrow n\cdot\log_{10}\left(\frac{10}{2^2\cdot3}\right)\leq-1$$

$$\Leftrightarrow n(1-2\cdot0.301-0.477)\leq-1$$

$$\Leftrightarrow-0.079n\leq-1$$

$$\Leftrightarrow n\geq\frac{1}{0.079}\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

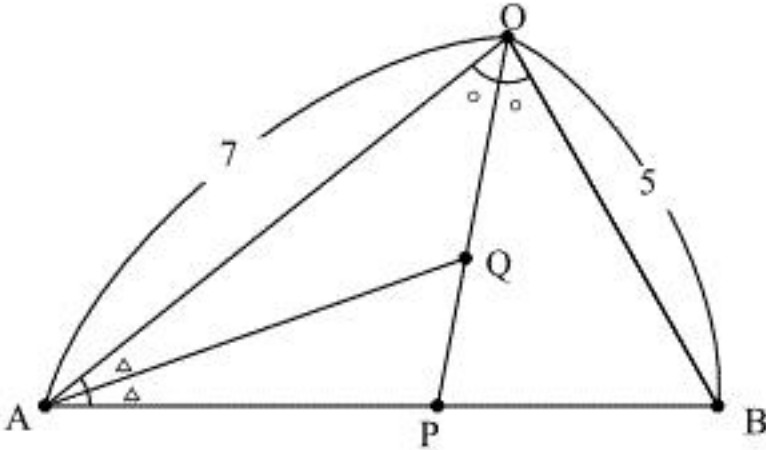
となる。ここで、

$$\frac{1}{0.079}=12.65\ldots$$

より、 $12<\frac{1}{0.079}<13$ であることから、条件①を満たす最小の自然数 n は $n=13$ であることが分かる。

(2)

△OABを図に示すと以下の通りである。



$$\begin{aligned}AB^2&=|\overrightarrow{AB}|^2\\&=|\vec{b}-\vec{a}|^2\\&=|\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2\\&=7^2-2\cdot5+5^2\\&=64\end{aligned}$$

であり、 $AB>0$ より $AB=8$ と分かる。また、点Pは辺ABを $OA:OB=7:5$ に内分するから、

$$AP=\frac{7}{7+5}AB=\frac{14}{3}$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{5\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}}{5+7}=\frac{5}{12}\vec{a}+\frac{7}{12}\vec{b}$$

が得られる。ここで、内心Qは△OABの全ての内角の2等分線の交点であるから、点Qは線分OP上に存在し、なおかつ線分AQは∠OAPの2等分線となる。よって点Qは辺OPを

$$AO:AP=7:\frac{14}{3}=3:2$$

に内分するから、

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OP}$$

となる。

【3】

(1)

放物線 $C: y = x^2$ について、方程式の両辺を x で微分すると $y' = 2x$ である。このことから、 C 上の点 (α, α^2) (α は実数) における C の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2 \\ &= 2\alpha x - \alpha^2 \end{aligned}$$

となる。これが点 $A(a, 2a - 2)$ を通るので、

$$\begin{aligned} 2a - 2 &= 2a\alpha - \alpha^2 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - 2a\alpha + 2a - 2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。これを α についての2次方程式と考え、判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= a^2 - 1 \cdot (2a - 2) \\ &= a^2 - 2a + 2 \\ &= (a - 1)^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

となることから、 a の値にかかわらず①式は2つの異なる実数解を持つ。 α が異なれば直線 $y = 2\alpha x - \alpha^2$ は異なるので、点 A を通る放物線 C の接線は2つ存在する。

(証明終)

(2)

(1)より、 p, q は①の解である。ここで、解と係数の関係より、 $p + q = 2a$, $pq = 2a - 2$ である。また、 $q - p$ について、

$$\begin{aligned} (q - p)^2 &= q^2 - 2pq + p^2 \\ &= (p + q)^2 - 4pq \\ &= 4a^2 - 4 \cdot (2a - 2) \\ &= 4a^2 - 8a + 8 \end{aligned}$$

である。ここで、 $p < q \Leftrightarrow q - p > 0$ であり、また、

$$4a^2 - 8a + 8 = 4(a - 1)^2 + 4 > 0$$

であることから、

$$q - p = 2\sqrt{a^2 - 2a + 2}$$

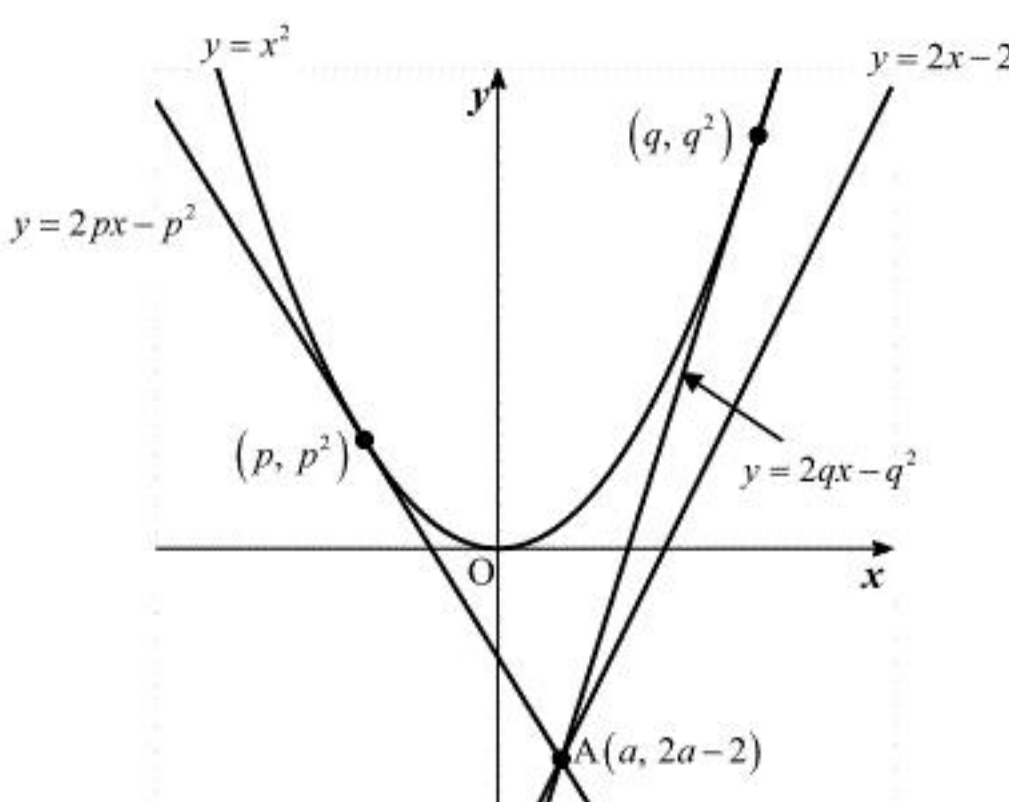
となる。

$$(\text{答}) \quad p + q = 2a, \quad pq = 2a - 2, \quad q - p = 2\sqrt{a^2 - 2a + 2}$$

(3)

(1)より、接点 (p, p^2) の接線の方程式は $y = 2px - p^2$ 、接点 (q, q^2) の接線の方程式は

$y = 2qx - q^2$ である。これら接線と放物線 C 、直線 $y = 2x - 2$ を図示すると下図を得る。



よって、面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_p^a \{x^2 - (2px - p^2)\} dx + \int_a^q \{x^2 - (2qx - q^2)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - px^2 + p^2x \right]_p^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - qx^2 + q^2x \right]_a^q \\ &= \left(\frac{1}{3}a^3 - pa^2 + p^2a \right) - \left(\frac{1}{3}p^3 - p^3 + p^3 \right) + \left(\frac{1}{3}q^3 - q^3 + q^3 \right) - \left(\frac{1}{3}a^3 - qa^2 + q^2a \right) \\ &= (q - p)a^2 - (q^2 - p^2)a + \frac{1}{3}(q^3 - p^3) \\ &= (q - p) \left\{ a^2 - (p + q)a + \frac{1}{3}(p^2 + pq + q^2) \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、(2)より、

$$\begin{aligned} p^2 + pq + q^2 &= (p + q)^2 - pq \\ &= 4a^2 - (2a - 2) \\ &= 4a^2 - 2a + 2 \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} S &= 2\sqrt{a^2 - 2a + 2} \left\{ a^2 - 2a^2 + \frac{1}{3}(4a^2 - 2a + 2) \right\} \\ &= 2\sqrt{a^2 - 2a + 2} \left(\frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 2a + 2}(a^2 - 2a + 2) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 2a + 2}(a^2 - 2a + 2)$$

(4)

$S = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 2a + 2}(a^2 - 2a + 2) = \frac{2}{3}(a^2 - 2a + 2)^{\frac{3}{2}}$ について、点 $A(a, 2a - 2)$ が直線 $y = 2x - 2$ 上

を動くことから、 a はすべての実数を変域とする変数と考えることができる。ここで、

$$a^2 - 2a + 2 = (a - 1)^2 + 1$$

より、 $a^2 - 2a + 2$ の最小値は $a = 1$ のとき1である。また、 $a^2 - 2a + 2$ が最小であるとき

$S = \frac{2}{3}(a^2 - 2a + 2)^{\frac{3}{2}}$ も最小となるため、 S の最小値は $a = 1$ のとき $\frac{2}{3}$ である。

$$(\text{答}) \quad a = 1 \text{ のとき最小値 } S = \frac{2}{3}$$