

〔 1 〕

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
(1)	$-3a+16$	$\frac{7}{3}a^2-16a+41$	$\frac{24}{7}$	$\frac{95}{7}$	1	$\frac{82}{3}$
	キ	ク	ケ	コ		
(2)	13	7	72	625860		

〔解説〕

(1)

6 個のデータの平均値は 2 であるから、

$$\frac{a+1-2+b+2a-3}{6}=2$$

が成立する。これを整理して、

$$b=-3a+16$$

が得られる。また、データの分散 s^2 は

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(a-2)^2 + (1-2)^2 + (-2-2)^2 + (b-2)^2 + (2a-2)^2 + (-3-2)^2}{6} \\ &= \frac{(a-2)^2 + (-3a+14)^2 + (2a-2)^2 + 42}{6} \\ &= \frac{14a^2 - 96a + 246}{6} \\ &= \frac{7}{3}a^2 - 16a + 41 \end{aligned}$$

と求められる。この式を平方完成すると、

$$\frac{7}{3}a^2 - 16a + 41 = \frac{7}{3}\left(a - \frac{24}{7}\right)^2 + \frac{95}{7}$$

となるから、 $1 \leq a \leq 4$ の範囲では、 $a = \frac{24}{7}$ で最小値 $\frac{95}{7}$ 、 $a = 1$ で最大値 $\frac{82}{3}$ をとる。

(2)

N を素因数分解すると、

$$N = 198744 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13^2$$

となるから、 N の素因数の中で最も大きいものは 13 で、2 番目に大きいものは 7 である。また、 N の正の約数の個数は

$$(3+1)(1+1)(2+1)(2+1) = 72 \text{ (個)}$$

となり、 N の正の約数のすべての和は

$$\begin{aligned} (1+2+2^2+2^3)(1+3)(1+7+7^2)(1+13+13^2) &= 15 \cdot 4 \cdot 57 \cdot 183 \\ &= 625860 \end{aligned}$$

となる。

【2】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ
	$3u-4u^3$	$-4u^3-4u^2+2u+2$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ
	$\left(-4,-\frac{1}{3},-3\right)$	$\left(5-4t,1-\frac{1}{3}t,2-3t\right)$	3	$(-12,-1,-9)$	$\frac{\sqrt{165}}{30}$

【解説】

(1)

3倍角の公式より、 $u=\sin x$ を用いて、

$$\begin{aligned}\sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x \\ &= 3u - 4u^3\end{aligned}$$

が得られる。また、2倍角の公式より、

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 1 - 2u^2\end{aligned}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}\sin 3x + 2\cos 2x - \sin x &= 3u - 4u^3 + 2(1 - 2u^2) - u \\ &= -4u^3 - 4u^2 + 2u + 2\end{aligned}$$

と変形できる。方程式 $\sin 3x + 2\cos 2x - \sin x = 0$ より、

$$\begin{aligned}-4u^3 - 4u^2 + 2u + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2u^3 + 2u^2 - u - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (u+1)(2u^2-1) &= 0\end{aligned}$$

が導かれる。 $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ より、 $-1 < u < 1$ であるから、方程式の解は

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。このとき、

$$x = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$$

である。不等式 $\sin 3x + 2\cos 2x - \sin x > 3\cos 2x$ より、

$$\begin{aligned}-4u^3 - 4u^2 + 2u + 2 &> 3(1 - 2u^2) \\ \Leftrightarrow 4u^3 - 2u^2 - 2u + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow (2u-1)(2u^2-1) &< 0\end{aligned}$$

となり、 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ より、 $0 < u < 1$ であるから u の範囲は

$$\frac{1}{2} < u < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

と求められる。このときの x の範囲は

$$\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$$

である。

(2)

点Cは点Aと点Bの中点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = (-5, -1, -2) \\ \therefore C &(-5, -1, -2)\end{aligned}$$

と求められる。また、点Dは線分ABを2:1に内分するから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \left(-4, -\frac{1}{3}, -3\right) \\ \therefore D &\left(-4, -\frac{1}{3}, -3\right)\end{aligned}$$

と求められる。さらに、点Eは直線OD上の点であるから、 t を実数として

$$\overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OD}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} \\ &= t\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \\ &= t\left(-4, -\frac{1}{3}, -3\right) - (-5, -1, -2) \\ &= \left(5-4t, 1-\frac{1}{3}t, 2-3t\right)\end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{CE}$ が $\overrightarrow{AB}$ に垂直なとき、 $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ が成立する。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(5-4t, 1-\frac{1}{3}t, 2-3t\right) \cdot (-2+8, 1+3, -5-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6(5-4t) + 4\left(1-\frac{1}{3}t\right) - 6(2-3t) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{22}{3}t + 22 &= 0 \\ \therefore t &= 3\end{aligned}$$

と求められる。このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= 3\overrightarrow{OD} \\ &= 3\left(-4, -\frac{1}{3}, -3\right) \\ &= (-12, -1, -9)\end{aligned}$$

となり、点Eの座標は $(-12, -1, -9)$ である。点Cは線分AB上にあり、 $\overrightarrow{CE}$ は $\overrightarrow{AB}$ に垂直であるから $\angle ACE = 90^\circ$ となり、

$$\begin{aligned}\sin \angle AEC &= \frac{AC}{AE} \\ &= \frac{\sqrt{(-5+8)^2 + (-1+3)^2 + (-2-1)^2}}{\sqrt{(-12+8)^2 + (-1+3)^2 + (-9-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{22}}{4\sqrt{30}} \\ &= \frac{\sqrt{165}}{30}\end{aligned}$$

と求められる。

[3]

(1)

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1 \text{ より,}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

となるから、点 $(1, 3)$ における曲線 C_1 の接線 ℓ の方程式は

$$y - 3 = 9(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y = 9x - 6$$

と求まる。

(答) $y = 9x - 6$

(2)

$$g(x) = ax^2 + bx + c \text{ より,}$$

$$g'(x) = 2ax + b$$

となり、曲線 $y = g(x)$ も点 $(1, 3)$ で直線 ℓ に接するから、

$$g(1) = 3, g'(1) = 9$$

が成立する。よって、

$$\begin{cases} a + b + c = 3 & \dots \textcircled{1} \\ 2a + b = 9 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

となり、 $\textcircled{2}$ より

$$b = -2a + 9$$

が得られる。これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$a - 2a + 9 + c = 3$$

$$\Leftrightarrow c = a - 6$$

となる。

(答) $b = -2a + 9, c = a - 6$

(3)

(2)より、 $a = 2$ のとき、 $b = 5, c = -4$ となるから、

$$g(x) = 2x^2 + 5x - 4$$

と表せる。 $f(x) < g(x)$ より、

$$x^3 + 3x^2 - 1 < 2x^2 + 5x - 4$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 (x + 3) < 0$$

となる。この不等式を満たす x の範囲は、 $x - 1 \neq 0$ かつ $x + 3 < 0$ である。よって、 $x < -3$ となる。

(答) $x < -3$

(4)

曲線 $y = f(x)$ と直線 ℓ の共有点の x 座標を求めると

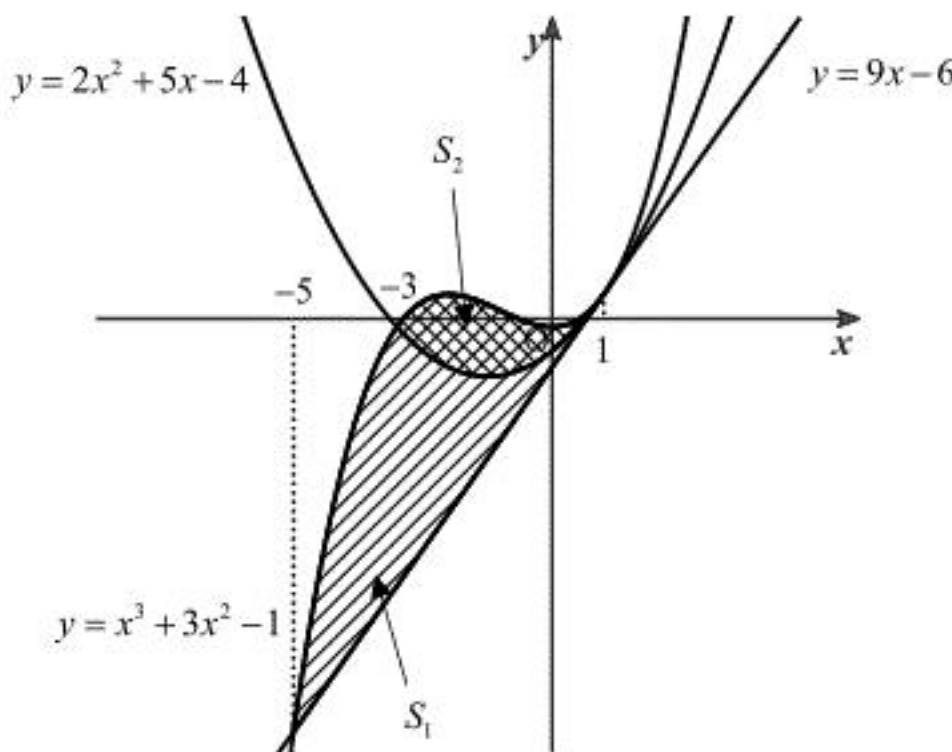
$$x^3 + 3x^2 - 1 = 9x - 6$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 (x + 5) = 0$$

より、 $x = -5, 1$ となる。また、曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ は点 $(1, 3)$ で接し、(3)より

$f(x) < g(x)$ を満たすのは $x < -3$ のときだけであるから、曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ と接線 ℓ を図示すると下図のようになる。



面積 S_1 は

$$S_1 = \int_{-5}^1 \{ (x^3 + 3x^2 - 1) - (9x - 6) \} dx$$

$$= \int_{-5}^1 (x^3 + 3x^2 - 9x + 5) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x \right]_{-5}^1$$

$$= \left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{9}{2} + 5 \right) - \left(\frac{625}{4} - 125 - \frac{225}{2} - 25 \right)$$

$$= 108$$

となる。次に面積 S_2 は

$$S_2 = \int_{-3}^1 \{ (x^3 + 3x^2 - 1) - (2x^2 + 5x - 4) \} dx$$

$$= \int_{-3}^1 (x^3 + x^2 - 5x + 3) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_{-3}^1$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 3 \right) - \left(\frac{81}{4} - 9 - \frac{45}{2} - 9 \right)$$

$$= \frac{64}{3}$$

となるから、求める $S_1 - S_2$ は

$$S_1 - S_2 = 108 - \frac{64}{3}$$

$$= \frac{260}{3}$$

となる。

(答) $\frac{260}{3}$