

【1】

【解答】

☐ ア $a < 1, 2 < a$
☐ イ $a < \frac{2}{3}$
☐ ウ $\frac{2}{3} < a < 1, 2 < a$
☐ エ $\frac{1}{4}$
☐ オ $\frac{1}{4}$

☐ カ $\frac{1}{19}$
☐ キ $\frac{15}{38}$
☐ ク 0
 ☐ ケ 15
 ☐ コ 18

【解説】

(1)

与えられた2次方程式(*)の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= a^2 - (3a - 2) \\ &= (a - 2)(a - 1)\end{aligned}$$

となる。方程式(*)が異なる2つの実数解をもつような定数 a の範囲は、

$$\begin{aligned}D &> 0 \\ \Leftrightarrow (a - 2)(a - 1) &> 0 \\ \therefore a &< 1, 2 < a\end{aligned}$$

となる。また、この方程式が正の解と負の解をもつ条件は、この方程式が異なる2実数解をもち、かつその2解を α, β とおいたとき、 $\alpha\beta < 0$ となることである。解と係数の関係より、

$$\alpha\beta = 3a - 2$$

が成り立つので、求める定数 a の範囲は、

$$\begin{aligned}D &> 0 \text{ かつ } 3a - 2 < 0 \\ \Leftrightarrow a &< \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。また、この方程式が異なる2つの正の解をもつ条件は、この方程式が異なる2実数解をもち、かつその2解を α, β と置いたとき、 $\alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0$ となることである。解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = 2a$$

が成り立つので、求める定数 a の範囲は、

$$\begin{aligned}D &> 0 \text{ かつ } 2a > 0 \text{ かつ } 3a - 2 > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} &< a < 1, 2 < a\end{aligned}$$

となる。

(2)

1本目が当たる確率は、 $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ となる。また、2本目が当たる確率は、1本目が当たる確率と

等しいので、2本目が当たる確率は $\frac{1}{4}$ である。また、2本とも当たる確率は、

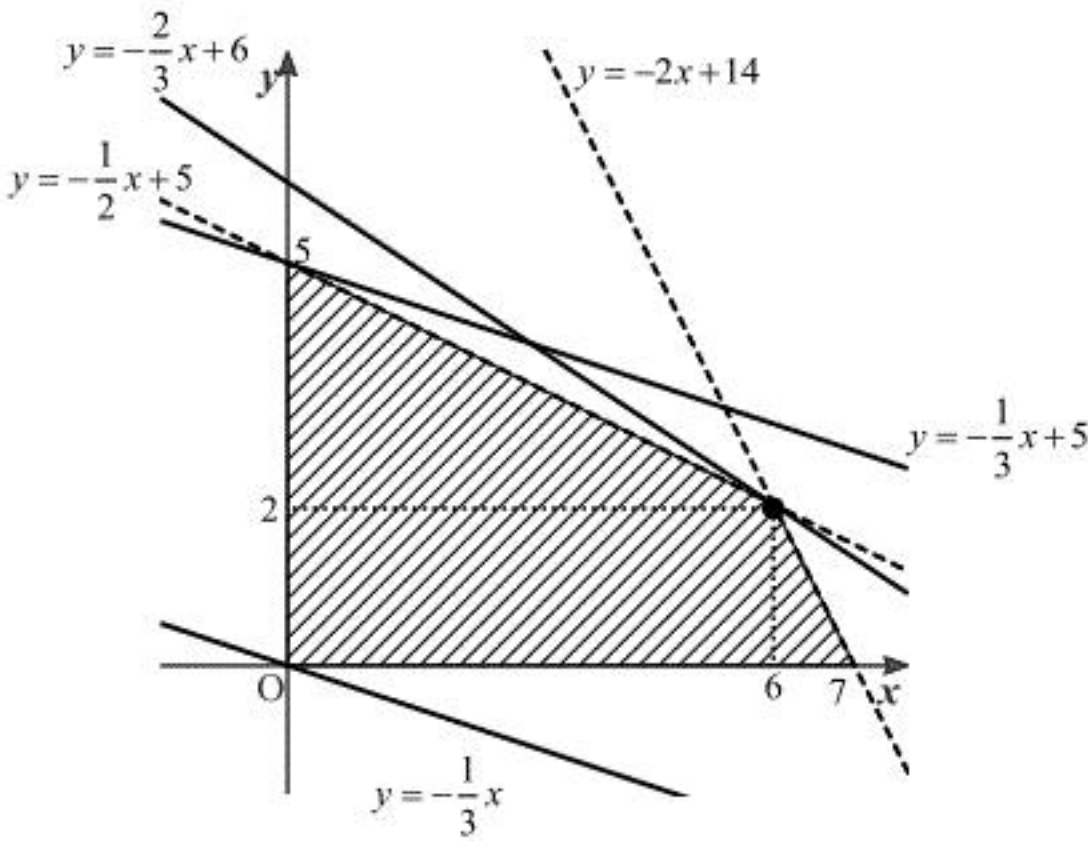
$$\frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

となる。また、1本だけ当たる確率は、1本目に当たる場合と2本目に当たる場合を考慮して、

$$\frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} + \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{15}{38}$$

となる。

(3)



連立不等式の示す範囲は上図の斜線部及び境界である。上図より、 $x + 3y = k \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{k}{3}$

と上図の斜線部が共有点を持つような k の値の範囲が $x + 3y$ のとりうる値の範囲である。よって上図より、

$$0 \leq \frac{k}{3} \leq 5 \Leftrightarrow 0 \leq x + 3y \leq 15$$

となる。また、 $2x + y = 14$ と $x + 2y = 10$ の交点は、

$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

より $(6, 2)$ であり、 $2x + 3y = l$ と置くと、上図より $2x + 3y = l \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{l}{3}$ が $(6, 2)$ を通るとき l は最大になる。よって、 $2x + 3y = l$ に $x = 6, y = 2$ を代入して求める最大値は18となる。

〔2〕

〔解答〕

☐ア $\frac{16}{3}$ ☐イ $-\frac{146}{9}$ ☐ウ 1009 ☐エ $-\frac{8}{3}$ ☐オ 1

☐カ -3 ☐キ $\frac{1}{3}$ ☐ク $-\frac{2}{3^n}$ ☐ケ $-2 \cdot (-3)^n$ ☐コ $-\frac{1}{5 \cdot 3^{n-1}} + \frac{3 \cdot (-3)^n}{5}$

〔解説〕

漸化式に $n=1$ を代入して、

$$\begin{aligned} a_2 a_1 &= -\frac{8}{3} \sum_{k=1}^1 a_k^2 \\ \Leftrightarrow a_2 a_1 &= -\frac{8}{3} a_1^2 \\ \Leftrightarrow (-2) \cdot a_2 &= -\frac{8}{3} \cdot 4 \quad (\because a_1 = -2) \\ \Leftrightarrow a_2 &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

となる。また、 $n=2$ を代入して、

$$\begin{aligned} a_3 a_2 &= -\frac{8}{3} \sum_{k=1}^2 a_k^2 \\ \Leftrightarrow a_3 a_2 &= -\frac{8}{3} (a_1^2 + a_2^2) \\ \Leftrightarrow \frac{16}{3} \cdot a_3 &= -\frac{8}{3} \left(4 + \frac{256}{9} \right) \left(\because a_1 = -2, a_2 = \frac{16}{3} \right) \\ \Leftrightarrow a_3 &= -\frac{146}{9} \end{aligned}$$

である。ここで、 $a_1^2 > 0, a_k^2 \geq 0$ より、 $\sum_{k=1}^n a_k^2 > 0$ となるので、漸化式より、

$$a_{n+1} a_n < 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。よって、 a_n の正負は交互に入れ替わることになるので、 $a_1 < 0$ より

$$n \text{ が偶数} \Leftrightarrow a_n > 0$$

となるから、求める項数は、

$$\frac{2019-1}{2} = 1009$$

となる。次に、与えられた漸化式と、 n を $n+1$ で置き換えてできる式とを比較すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} a_{n+2} a_{n+1} &= -\frac{8}{3} \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \\ a_{n+1} a_n &= -\frac{8}{3} \sum_{k=1}^n a_k^2 \end{aligned}$$

上の式から下の式を引いて、

$$\begin{aligned} a_{n+2} a_{n+1} - a_{n+1} a_n &= -\frac{8}{3} \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \\ &= -\frac{8}{3} a_{n+1}^2 \end{aligned}$$

となる。①より、 $a_{n+1} \neq 0$ なので、上の式の両辺を a_{n+1} で割って、

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= -\frac{8}{3} a_{n+1} \\ \Leftrightarrow a_{n+2} &= -\frac{8}{3} a_{n+1} + a_n \end{aligned}$$

となる。次に、 $x^2 = -\frac{8}{3}x + 1$ を解くと、

$$\begin{aligned} x^2 &= -\frac{8}{3}x + 1 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x-1)(x+3) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{3}, -3 \end{aligned}$$

であるので、

$$\alpha = -3, \beta = \frac{1}{3}$$

となる。最後に $a_{n+2} = -\frac{8}{3}a_{n+1} + a_n$ を変形すると、

$$\begin{aligned} a_{n+2} + 3a_{n+1} &= \frac{1}{3}(a_{n+1} + 3a_n) \\ a_{n+2} - \frac{1}{3}a_{n+1} &= -3\left(a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n\right) \end{aligned}$$

であるので、題意のように b_n, c_n を置くと、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{3}b_n \\ c_{n+1} &= -3c_n \end{aligned}$$

となる。よって、数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ はそれぞれ初項が $b_1 = a_2 + 3a_1 = -\frac{2}{3}, c_1 = a_2 - \frac{1}{3}a_1 = 6$ 、公比が

$\frac{1}{3}, -3$ の等比数列なので、

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{2}{3^n} \\ c_n &= 6 \cdot (-3)^{n-1} \\ &= -2 \cdot (-3)^n \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} b_n - c_n &= \frac{10}{3}a_n \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{3^n} + 2 \cdot (-3)^n &= \frac{10}{3}a_n \\ \Leftrightarrow a_n &= -\frac{1}{5 \cdot 3^{n-1}} + \frac{3 \cdot (-3)^n}{5} \end{aligned}$$

となる。

【3】

【解答】

☐ ア 2 ☐ イ $2t^2-1$ ☐ ウ $4t^3-3t$ ☐ エ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ オ $\frac{\pi}{4}$

☐ カ $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ ☐ キ $\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$ ☐ ク $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ☐ ケ $2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ☐ コ $\frac{\pi^2}{16}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}$

【解説】

(1)

$$f(0)=\cos 0+\cos 0=2$$

である。倍角公式を用いて、 $\cos 2x$ を $\cos x=t$ で置き換えて表すと、

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=2t^2-1$$

となる。3倍角の公式を用いて、 $\cos 3x$ を同様にして表すと、

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x=4t^3-3t$$

である。よって、 $f(x)$ を t の式で表すと、

$$f(x)=4t^3-2t$$

となり、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2t(2t^2-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となるので、 $0 \leq x \leq \pi$ より、

$$\begin{aligned} \cos x &= 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

である。よって、 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

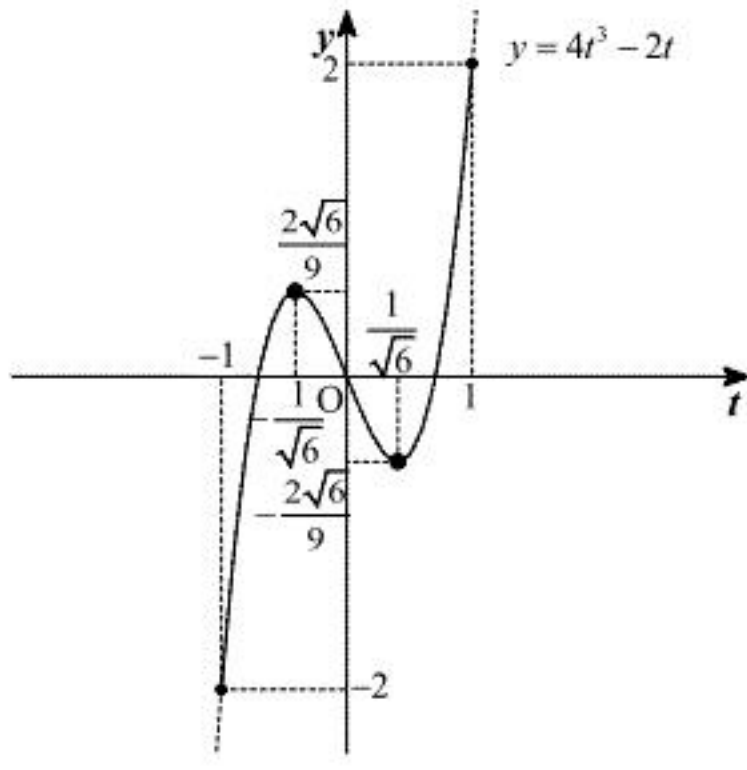
(2)

$0 \leq x \leq \pi$ より、 $-1 \leq t \leq 1$ である。 $f(x)=g(t)$ とおくと、 $g(t)=4t^3-2t$ であり、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 12t^2-2 \\ &= 12\left(t+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{aligned}$$

となるので、 $-1 \leq t \leq 1$ における $g(t)$ の増減表と $y=g(t)$ のグラフは以下の通りである。

t	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	...	1
$g'(t)$		+	0	-	0	+	
$g(t)$	-2	↗	$\frac{2\sqrt{6}}{9}$	↘	$-\frac{2\sqrt{6}}{9}$	↗	2



よって、 $y=g(t)$ と $y=k$ が相異なる3つの共有点をもつのは $-\frac{2\sqrt{6}}{9} < k < \frac{2\sqrt{6}}{9}$ のときであり、

$0 \leq x \leq \pi$ において、 x と t は1対1に対応するので、求める k の範囲は、

$$-\frac{2\sqrt{6}}{9} < k < \frac{2\sqrt{6}}{9}$$

となる。

(3)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \tan x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (4\cos^3 x - 2\cos x) \tan x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{(4\cos^2 x - 2)\sin x\} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\cos x=t$ と置換すると、 $dt=-\sin x dx$ となり、 x と t の対応は以下のようになる。

x	0	→	$\frac{\pi}{4}$
t	1	→	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって求める式は、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{(4\cos^2 x - 2)\sin x\} dx &= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} -(4t^2 - 2) dt \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (4t^2 - 2) dt \\ &= \left[\frac{4}{3}t^3 - 2t \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{2}{3}(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

である。

(4)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3\sin 3x - \sin x \\ f''(x) &= -9\cos 3x - \cos x \\ &= -9(4\cos^3 x - 3\cos x) - \cos x \\ &= -36\cos^3 x + 26\cos x \\ &= -36t\left(t+\frac{\sqrt{26}}{6}\right)\left(t-\frac{\sqrt{26}}{6}\right) \end{aligned}$$

となるので、変曲点の x 座標は、

$$\cos x = 0, \pm \frac{\sqrt{26}}{6}$$

を満たす。このうち、 $0 \leq x \leq \pi$ を満たし、2番目に x が大きい点の座標は、 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ となる。

また、

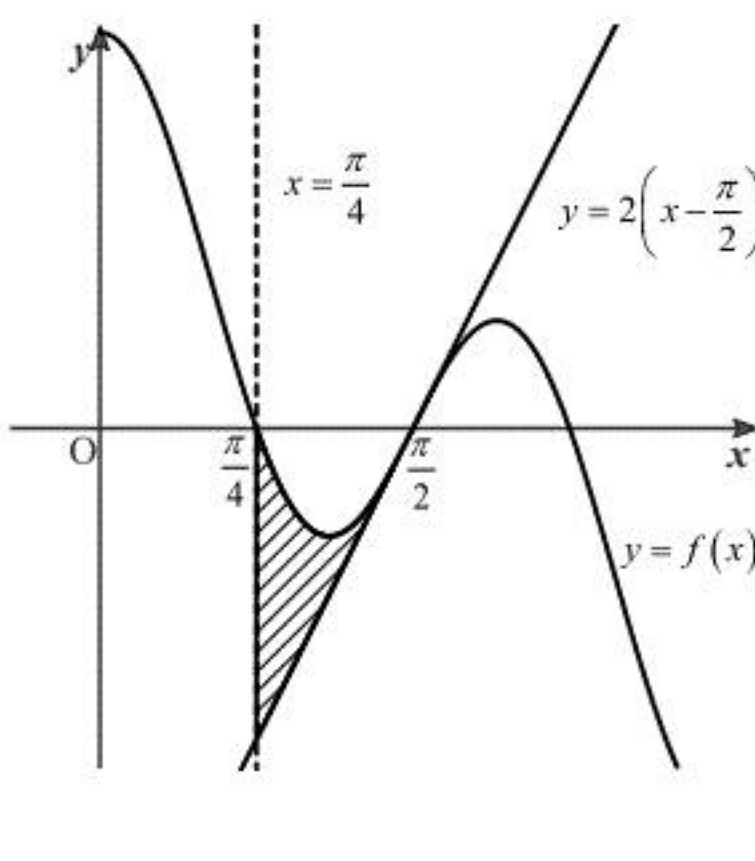
$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (-3) \cdot (-1) - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となるので、この変曲点における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は、 $y=2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ である。また、

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ において $f''(x) > 0$ より、 $y=f(x)$ はこの範囲で下に凸である。よって、 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

において $y=f(x)$ は常に $y=2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ の上側にあるから、これらを図示すると下図のよう

なる。



よって、求める面積は上図の斜線部の面積となるから、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ f(x) - 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \right\} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos 3x + \cos x - 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}\sin 3x + \sin x - x^2 + \pi x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi^2}{4} \right) - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3\pi^2}{16} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。

〔4〕

- (1) $\overline{OA} = (1, 1, 1)$, $\overline{OB} = (-1, 1, 2)$ となるので,

$$\begin{aligned} |\overline{OA}| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{3} \\ |\overline{OB}| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{6} \\ \overline{OA} \cdot \overline{OB} &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。また、三角形 OAB の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{OA}|^2 |\overline{OB}|^2 - (\overline{OA} \cdot \overline{OB})^2} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad |\overline{OA}| = \sqrt{3}, \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 2, S = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

- (2) $D(-1, -3, z)$ とおくと、点 D は平面 OAB 上にあるので、実数 p, q を用いて、

$$\begin{aligned} \overline{OD} &= p\overline{OA} + q\overline{OB} \\ &= (p - q, p + q, p + 2q) \end{aligned}$$

と表せる。よって、両辺の成分を比較して、

$$\begin{aligned} \begin{cases} p - q = -1 \\ p + q = -3 \\ p + 2q = z \end{cases} \\ \Leftrightarrow p = -2, q = -1, z = -4 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad z = -4$$

- (3) $\overline{CP} = (s - t, s + t, s + 2t - 1)$ となるので、

$$\begin{aligned} |\overline{CP}|^2 &= (s - t)^2 + (s + t)^2 + (s + 2t - 1)^2 \\ &= 3s^2 + 6t^2 + 4st - 2s - 4t + 1 \\ &= 3s^2 + 2(2t - 1)s + 6t^2 - 4t + 1 \\ &= 3 \left\{ s + \frac{1}{3}(2t - 1) \right\}^2 - 3 \cdot \frac{1}{9}(2t - 1)^2 + 6t^2 - 4t + 1 \\ &= 3 \left\{ s + \frac{1}{3}(2t - 1) \right\}^2 + \frac{14}{3}t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、 t を固定して考えたとき、 $|\overline{CP}|^2$ の値を最小にする s は、 $s = -\frac{1}{3}(2t - 1)$ となる。

$$(答) \quad |\overline{CP}|^2 = 3s^2 + 6t^2 + 4st - 2s - 4t + 1, s = -\frac{1}{3}(2t - 1)$$

- (4) (3) の $|\overline{CP}|^2$ を変形して、

$$\begin{aligned} |\overline{CP}|^2 &= 3 \left\{ s + \frac{1}{3}(2t - 1) \right\}^2 + \frac{14}{3}t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{2}{3} \\ &= 3 \left\{ s + \frac{1}{3}(2t - 1) \right\}^2 + \frac{14}{3} \left(t^2 - \frac{4}{7}t + \frac{1}{7} \right) \\ &= 3 \left\{ s + \frac{1}{3}(2t - 1) \right\}^2 + \frac{14}{3} \left(t - \frac{2}{7} \right)^2 + \frac{2}{7} \end{aligned}$$

となる。よって、(3) と合わせて、 $t = \frac{2}{7}, s = -\frac{1}{3} \left(2 \cdot \frac{2}{7} - 1 \right) = \frac{1}{7}$ のとき、 $|\overline{CP}|^2$ は最小値 $\frac{2}{7}$ をとる。

$$(答) \quad \text{最小値} : \frac{2}{7} \left(s = \frac{1}{7}, t = \frac{2}{7} \right)$$

- (5) 底面を三角形 OAB としたとき、高さは $|\overline{CP}|$ の最小値となる。(4) より、 $|\overline{CP}|$ の最小値は

$\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$ となるので、(1) と合わせて、求める四面体 OABC の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S \cdot \frac{\sqrt{14}}{7} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{7} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad V = \frac{1}{3}$$