

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	
	$4k^2-8k+5$	0	2	
(2)	エ	オ	カ	キ
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{23}{1296}$	$\frac{23}{216}$

【解説】

(1) $f(x)=x^2-(2k-1)x+k-1$ のとき、方程式 $f(x)=0$ について、解と係数の関係より $\alpha+\beta=2k-1, \alpha\beta=k-1$

であるから、

$$\begin{aligned}(\beta-\alpha)^2&=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\\&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\&=(2k-1)^2-4(k-1)\\&=4k^2-8k+5\end{aligned}$$

となる。次に、 $\alpha<n<\beta$ を満たす整数 n がちょうど2つあるとき、

$$\beta-\alpha\leq 3$$

を満たすことが[※]、必要条件である。 $\beta-\alpha>0$ であるから

$$\beta-\alpha\leq 3\Leftrightarrow (\beta-\alpha)^2\leq 9$$

であり、

$$\begin{aligned}4k^2-8k+5&\leq 9\\&\Leftrightarrow 4k^2-8k-4\leq 0\\&\Leftrightarrow k^2-2k-1\leq 0\\&\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}\leq k\leq 1+\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。よって、これを満たす整数 k は $k=0, 1, 2$ である。

[1] $k=0$ のとき

$$f(x)=x^2+x-1$$

であり、 $f(x)=0$ を解くと

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \beta=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

となり、 $\alpha<n<\beta$ を満たす整数 n は

$$n=-1, 0$$

の2つのみである。

[2] $k=1$ のとき

$$f(x)=x^2-x$$

であり、 $f(x)=0$ を解くと

$$\alpha=0, \beta=1$$

となり、 $\alpha<n<\beta$ を満たす整数 n は存在しない。よって、 $k=1$ は不適である。

[3] $k=2$ のとき

$$f(x)=x^2-3x+1$$

であり、 $f(x)=0$ を解くと

$$\alpha=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

となり、 $\alpha<n<\beta$ を満たす整数 n は

$$n=1, 2$$

の2つのみである。

以上、[1], [2], [3]より、求める k の値は

$$k=0, 2$$

である。

(2)

1, 2, 3, 4 回目に出る目の数をそれぞれ a, b, c, d ($1\leq a, b, c, d\leq 6$) とする。

$X=1$ である確率は、 $a=5$ または $a=6$ となる確率であるから

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

となる。

$X=2$ である確率は、 $a\leq 4$ かつ $a+b\geq 5$ となる確率である。これを満たす a, b の組み合わせは

$$\begin{aligned}a=1&\text{ のとき、 } b=4, 5, 6\\a=2&\text{ のとき、 } b=3, 4, 5, 6\\a=3&\text{ のとき、 } b=2, 3, 4, 5, 6\\a=4&\text{ のとき、 } b=1, 2, 3, 4, 5, 6\end{aligned}$$

となり、計18通りであるから、求める確率は

$$\frac{18}{6^2}=\frac{1}{2}$$

となる。

$X=4$ である確率は、 $a+b+c\leq 4$ かつ $a+b+c+d\geq 5$ となる確率である。これを満たす a, b, c, d の組み合わせを考える。このとき、 $1\leq a, b, c$ より、 $3\leq a+b+c$ である。

[1] $a+b+c=3$ のとき

$$(a, b, c)=(1, 1, 1)$$

であり、 $d=2, 3, 4, 5, 6$ となるから、

$$1\cdot 5=5$$

通りある。

[2] $a+b+c=4$ のとき

$$(a, b, c)=(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$$

であり、 $d=1, 2, 3, 4, 5, 6$ となるから、

$$3\cdot 6=18$$

通りある。

以上、[1], [2]より求める確率は

$$\frac{5+18}{6^4}=\frac{23}{1296}$$

となる。

次に、 $X\geq 3$ となる事象を A 、 $X=4$ となる事象を B とすると、求める条件付き確率は

$$\begin{aligned}P_A(B)&=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\\&=\frac{P(B)}{P(A)}\\&=\frac{\frac{23}{6^4}}{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

である。 $P(A)$ は全体から $X=1, 2$ となる確率を引けばよく

$$P(A)=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$$

である。よって、求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{\frac{23}{6^4}}{\frac{1}{6}}=\frac{23}{216}$$

となる。

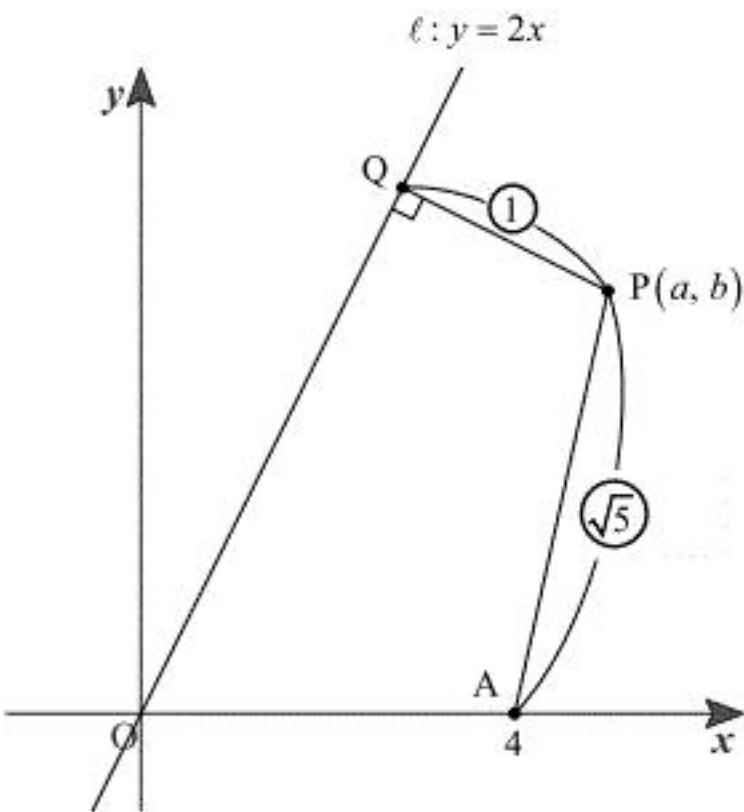
【2】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ
(1)	$\frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b$	$\frac{3}{4}a + 2 - \frac{4}{a}$	$\left(2, \frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{8}{5}, \frac{33}{10}\right)$
	オ	カ	キ	
(2)	2	$\frac{1}{3}a_n + 2$	$3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	

【解説】

(1)



直線 PQ は直線 $\ell: y = 2x$ と直交するから、直線 PQ の傾きは $-\frac{1}{2}$ であり、直線 PQ の式は

$$y = -\frac{1}{2}(x - a) + b$$

となる。よって、Q の x 座標は

$$\begin{aligned} 2x &= -\frac{1}{2}(x - a) + b \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。次に、線分 PQ, PA の長さはそれぞれ

$$\begin{aligned} PQ &= \frac{|2a - b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2a - b|}{\sqrt{5}} \\ PA &= \sqrt{(a - 4)^2 + b^2} \end{aligned}$$

であり、 $PQ:PA = 1:\sqrt{5}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{|2a - b|}{\sqrt{5}} : \sqrt{(a - 4)^2 + b^2} &= 1:\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow |2a - b| &= \sqrt{(a - 4)^2 + b^2} \end{aligned}$$

となる。両辺は共に正であるから、両辺を 2 乗しても同値であり、

$$\begin{aligned} |2a - b|^2 &= (a - 4)^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow 4a^2 - 4ab + b^2 &= a^2 - 8a + 16 + b^2 \\ \Leftrightarrow 3a^2 - 4ab + 8a - 16 &= 0 \quad \cdots \textcircled{2} \\ \Leftrightarrow 4ab &= 3a^2 + 8a - 16 \end{aligned}$$

となり、 $a \neq 0$ より、

$$b = \frac{3a^2 + 8a - 16}{4a}$$

である。次に、Q の座標が $(1, 2)$ であるとき、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b &= 1 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{5 - a}{2} \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

であり、これを $\textcircled{2}$ に代入し、 b を消去すると

$$\begin{aligned} 3a^2 - 4a \cdot \frac{5 - a}{2} + 8a - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5a^2 - 2a - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 2)(5a + 8) &= 0 \\ \therefore a &= 2, -\frac{8}{5} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\textcircled{3}$ より

$$\begin{aligned} a = 2 \text{ のとき, } b &= \frac{5 - 2}{2} = \frac{3}{2} \\ a = -\frac{8}{5} \text{ のとき, } b &= \frac{5 - \left(-\frac{8}{5}\right)}{2} = \frac{33}{10} \end{aligned}$$

であるから、点 P の座標は

$$(a, b) = \left(2, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{8}{5}, \frac{33}{10}\right)$$

となる。

(2)

まず、 a_1 は

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 f_1(x) dx \\ &= \int_0^1 (2x + 1) dx \\ &= \left[x^2 + x \right]_0^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \int_0^1 f_{n+1}(x) dx \\ &= \int_0^1 \left\{ f_1(x) + \frac{1}{3} \int_0^1 f_n(x) dx \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ f_1(x) + \frac{1}{3} a_n \right\} dx \\ &= a_1 + \frac{1}{3} a_n \int_0^1 dx \\ &= 2 + \frac{1}{3} a_n [x]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} a_n + 2 \end{aligned}$$

である。これを変形すると

$$a_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(a_n - 3)$$

となり、数列 $\{a_n - 3\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_n - 3 &= (a_1 - 3) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \therefore a_n &= 3 + (2 - 3) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

[3]

(1)

$x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 |x-1| \\ &= x^2 (1-x) \\ &= x^2 - x^3 \end{aligned}$$

であるから、両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 3x^2 \\ &= x(2-3x) \end{aligned}$$

となる。よって、増減表は以下の通りになる。

x	...	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって、求める値は

$$\text{極小値： } f(0) = 0$$

$$\text{極大値： } f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left|\frac{2}{3} - 1\right| = \frac{4}{27}$$

となる。

(答) 極小値：0，極大値： $\frac{4}{27}$

(2)

関数 $f(x) = x^2 |x-1|$ に関して

$$x \leq 1 \text{ のとき, } f(x) = x^2 (1-x) = x^2 - x^3$$

$$x \geq 1 \text{ のとき, } f(x) = x^2 (x-1) = x^3 - x^2$$

であるから

$$\begin{aligned} g(2) &= \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left\{ \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \right\} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3}{2}$

(3)

$$g(t) = \int_0^t f(x) dx \text{ であるから}$$

$$g'(t) = f(t) = t^2 |t-1| \geq 0$$

となり、 $g(t)$ は単調増加することが分かる。さらに、

$$g(0) = 0 < 1$$

$$g(2) = \frac{3}{2} > 1$$

であるから、 $g(t) = 1$ を満たす実数 t の個数は1個である。

(証明終)