

【1】

【解答】

(1)	ア	イ		
	9	1		
(2)	ウ	エ		
	$2+\sqrt{3}$	$7-4\sqrt{3}$		
(3)	オ	カ	キ	ク
	5	$5x+36$	$41-10i$	1781
(4)	ケ	コ		
	1	4		

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} A &= \left(2^{\frac{4}{3}} \times 2^{-1}\right)^6 \times \left\{\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{6}}\right\}^{\frac{3}{5}} \\ &= \left(2^{\frac{4}{3}-1}\right)^6 \times \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}} \\ &= 2^{\frac{1}{3} \cdot 6} \times \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{16}{81}}} \\ &= 2^2 \times \frac{9}{4} \\ &= 9 \\ \\ B &= \left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}\right) \\ &= \left\{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right\}\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}\right) \\ &= \left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}\right)\left\{\left(\sqrt[3]{4}\right)^2+\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right\} \\ &= \left(\sqrt[3]{4}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 \\ &= 4-3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(2)

与えられた等式を変形すると、

$$\begin{aligned} \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} &= \sqrt{6} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{6} \sqrt{x}+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= \frac{-\left(-\sqrt{6}\right) \pm \sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2-4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &= \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{8 \pm 4 \sqrt{3}}{4} \\ \Leftrightarrow x &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。ここで、 $x>1$ より、

$$x=2+\sqrt{3}$$

とわかる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right\}^2} \\ &= \frac{7-4 \sqrt{3}}{\left(4-3\right)^2} \\ &= 7-4 \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(3)

α を定数として、 $Q(x)=x^2-2x+\alpha$ とおくと、

$$\begin{aligned} Q(1-2i) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(1-2i\right)^2-2\left(1-2i\right)+\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-3-4i\right)-2\left(1-2i\right)+\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= 5 \end{aligned}$$

より、 $Q(x)=x^2-2x+5$ である。したがって、

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4-4x^3+3x^2+7x+6 \\ &= \left(x^2-2x-6\right)\left(x^2-2x+5\right)+5x+36 \\ &= \left(x^2-2x-6\right)Q(x)+5x+36 \end{aligned}$$

より、 $P(x)$ を $Q(x)$ で割った余りは、 $5x+36$ である。また、 $Q(1-2i)=0$ より、

$$\begin{aligned} P(1-2i) &= 5(1-2i)+36 \\ &= 41-10i \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} Q(1+2i) &= \left(1+2i\right)^2-2\left(1+2i\right)+5 \\ &= \left(-3+4i\right)-2\left(1+2i\right)+5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、同様にして、

$$\begin{aligned} P(1+2i) &= 5(1+2i)+36 \\ &= 41+10i \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる。したがって、

$$\begin{aligned} P(1-2i) \cdot P(1+2i) &= (41-10i)(41+10i) \\ &= 41^2-(10i)^2 \\ &= 1781 \end{aligned}$$

である。

(4)

まず、「 $3r$ が無理数ならば r は無理数である」という命題は真であることを示す。そのために対偶「 r が有理数ならば $3r$ は有理数である」という命題が真であることを示す。仮定より、整数 p, q ($q \neq 0$) を用いて、 $r=\frac{p}{q}$ と表せるから、 $3r=\frac{3p}{q}$ である。これは有理数であるから、命題「 r が有理数ならば $3r$ は有理数である」は真であり、その対偶「 $3r$ が無理数ならば r は無理数である」も真である。次に「 r が無理数ならば $3r$ は無理数である」という命題も真であることを示す。そのために対偶「 $3r$ が有理数ならば r は有理数である」という命題が真であることを示す。仮定より、整数 p, q ($q \neq 0$) を用いて、 $3r=\frac{p}{q}$ と表せるから、

$r=\frac{p}{3q}$ である。これは有理数であるから、命題「 $3r$ が有理数ならば r は有理数である」は真であり、その対偶「 r が無理数ならば $3r$ は無理数である」も真である。以上より、 $3r$ が無理数であることは r は無理数であるための必要十分条件である。次に、「 xy 平面上の点について、 x 座標と y 座標がともに整数ならば、原点からの距離が整数である」という命題

を考える。これは点(1,1)を考えると、原点からの距離は $\sqrt{2}$ であるから、この命題の反例である。したがって、この命題は偽であると分かる。また、「 xy 平面上の点について、原点からの距離が整数ならば、その点の x 座標と y 座標はともに整数である」という命題を考え

る。これは原点からの距離が2 である点考えたとき、 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ という点は、 x 座標と y 座標は整数でないので、この命題の反例である。したがって、この命題は偽である。以上より、 xy 平面上の点について、 x 座標と y 座標がともに整数であることは、原点からの距離が整数であることの必要条件でも十分条件でもない。

【2】

【解答】

(1)	ア	
	0	
(2)	イ	ウ
	$1-2p+2p^2$	$2p-2p^2$
(3)	エ	オ
	$a_{n+2}=(1-2p+2p^2)a_n+(2p-2p^2)c_n$	$c_{n+2}=(2p-2p^2)a_n+(1-2p+2p^2)c_n$
(4)	カ	キ
	1	$1-4p+4p^2$
(5)	ク	ケ
	$a_n=\frac{1}{2}\{1+(1-2p)^n\}$	$c_n=\frac{1}{2}\{1-(1-2p)^n\}$
	コ	
	$\frac{m}{2}+\frac{(1-4p+4p^2)\{1-(1-4p+4p^2)^m\}}{8p-8p^2}$	

【解説】

(1)

点 P は最初に頂点 A にいるから、開始から 1 秒後には頂点 O または B に移動しており、点 P が頂点 A にいることはない。したがって、

$$a_1=0$$

である。

(2)

開始から 2 秒後に点 P が頂点 A にいるのは、 $A \rightarrow B \rightarrow A$ あるいは $A \rightarrow O \rightarrow A$ のように移動するときであるから、

$$\begin{aligned} a_2 &= (1-p)^2 + p^2 \\ &= 1-2p+2p^2 \end{aligned}$$

である。また、開始から 2 秒後に点 P が頂点 C にいるのは、 $A \rightarrow B \rightarrow C$ あるいは $A \rightarrow O \rightarrow C$ のように移動するときであるから、

$$\begin{aligned} c_2 &= (1-p)p + p(1-p) \\ &= 2p-2p^2 \end{aligned}$$

である。

(3)

1 秒ごとに点 P は $\{A, C\}$ と $\{O, B\}$ という 2 つのグループの間を行き来する。このことと、点 P は最初に頂点 A にいることから、偶数秒後に点 P は頂点 A または頂点 C にいる。したがって、 $n+2$ 秒後に点 P が頂点 A にいるのは、 n 秒後に点 P が頂点 A にいて $A \rightarrow B \rightarrow A$ または $A \rightarrow O \rightarrow A$ と移動するとき、あるいは n 秒後に点 P が頂点 C にいて $C \rightarrow B \rightarrow A$ または $C \rightarrow O \rightarrow A$ と移動するときに限られる。よって、

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_n \cdot \{(1-p)^2 + p^2\} + c_n \cdot \{p(1-p) + (1-p)p\} \\ &= (1-2p+2p^2)a_n + (2p-2p^2)c_n \end{aligned}$$

が成り立つ。同様に考えて、

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= a_n \cdot \{p(1-p) + (1-p)p\} + c_n \cdot \{(1-p)^2 + p^2\} \\ &= (2p-2p^2)a_n + (1-2p+2p^2)c_n \end{aligned}$$

が成り立つ。

(4)

(3)より、

$$\begin{aligned} a_{2m+2} + c_{2m+2} &= \{(1-2p+2p^2)a_{2m} + (2p-2p^2)c_{2m}\} + \{(2p-2p^2)a_{2m} + (1-2p+2p^2)c_{2m}\} \\ &= a_{2m} + c_{2m} \end{aligned}$$

が成り立つから、数列 $\{a_{2m} + c_{2m}\}$ は初項 $a_2 + c_2 = 1$ 、公比 1 の等比数列である。また、

$$\begin{aligned} a_{2m+2} - c_{2m+2} &= \{(1-2p+2p^2)a_{2m} + (2p-2p^2)c_{2m}\} - \{(2p-2p^2)a_{2m} + (1-2p+2p^2)c_{2m}\} \\ &= (1-4p+4p^2)a_{2m} - (1-4p+4p^2)c_{2m} \\ &= (1-4p+4p^2)(a_{2m} - c_{2m}) \end{aligned}$$

が成り立つから、数列 $\{a_{2m} - c_{2m}\}$ は初項 $a_2 - c_2 = 1-4p+4p^2$ 、公比 $1-4p+4p^2$ の等比数列である。

(5)

(4)より、

$$\begin{aligned} a_{2m} + c_{2m} &= 1 \\ a_{2m} - c_{2m} &= (1-4p+4p^2)^m \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{1}{2}\{1+(1-4p+4p^2)^m\} \\ &= \frac{1}{2}\{1+(1-2p)^{2m}\} \\ c_{2m} &= \frac{1}{2}\{1-(1-4p+4p^2)^m\} \\ &= \frac{1}{2}\{1-(1-2p)^{2m}\} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 n が 2 以上の偶数のとき、 $2m$ を n で置き換えて、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\{1+(1-2p)^n\} \\ c_n &= \frac{1}{2}\{1-(1-2p)^n\} \end{aligned}$$

である。また、 n が奇数のとき、 $a_n = 0$ であることから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2m} a_n &= \sum_{n=1}^m a_{2n} \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{2}\{1+(1-4p+4p^2)^n\} \\ &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m (1-4p+4p^2)^n \\ &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-4p+4p^2)\{1-(1-4p+4p^2)^m\}}{1-(1-4p+4p^2)} \quad (\because 0 < p < 1 \text{ より } 1-4p+4p^2 \neq 1) \\ &= \frac{m}{2} + \frac{(1-4p+4p^2)\{1-(1-4p+4p^2)^m\}}{8p-8p^2} \end{aligned}$$

である。

【3】

【解答】

(1)	$\boxed{\text{ア}}$		
	$n\pi$		
(2)	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ウ}}$	$\boxed{\text{エ}}$
	$e^{-x}(\cos x-\sin x)$	$\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}$
(3)	$\boxed{\text{オ}}$	$\boxed{\text{カ}}$	
	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}$	$\frac{\pi e^{\frac{3}{4}\pi}}{2\sqrt{2}\left(e^{\pi}-1\right)}$	
(4)	$\boxed{\text{キ}}$	$\boxed{\text{ク}}$	
	-2	$-\frac{1}{2}$	
(5)	$\boxed{\text{ケ}}$	$\boxed{\text{コ}}$	
	$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}-\frac{\sqrt{2}}{16}\pi e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}e^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi^2}{24}e^{-\frac{\pi}{2}}$	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{-x}\sin x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x &= 0 \left(\because e^{-x} > 0 \right) \\ \Leftrightarrow x &= m\pi\end{aligned}$$

と変形できる。ここで m は整数である。したがって、点 P_n の x 座標は $n\pi$ である。

(2)

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{-x}\sin x \text{ より,} \\ f'(x) &= \left(e^{-x}\right)' \cdot \sin x + e^{-x} \cdot (\sin x)' \\ &= -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \\ &= e^{-x}(\cos x - \sin x)\end{aligned}$$

である。また、 m を整数とすると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{-x}(\cos x - \sin x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x - \sin x &= 0 \left(\because e^{-x} > 0 \right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} &= m\pi \\ \Leftrightarrow x &= \left(m + \frac{1}{4}\right)\pi\end{aligned}$$

と変形できるから、 $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ の範囲において、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \left\{\left(n-1\right) + \frac{1}{4}\right\}\pi \\ \Leftrightarrow x &= \left(n-\frac{3}{4}\right)\pi\end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $x = \left(n-\frac{3}{4}\right)\pi$ の前後で $f'(x)$ の符号が変化するから、 $f(x)$ は $x = \left(n-\frac{3}{4}\right)\pi$

で極値をとる。その値は、

$$\begin{aligned}f\left(\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi\right) &= e^{-\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}\sin\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi \\ &= e^{-\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}\sin\left(n\pi-\frac{3}{4}\pi\right) \\ &= e^{-\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}\left\{\sin n\pi\cos\frac{3}{4}\pi - \cos n\pi\sin\frac{3}{4}\pi\right\} \\ &= e^{-\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}\cdot\left\{-(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \\ &= (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}\end{aligned}$$

である。

(3)

三角形 $P_{n-1}P_nQ_n$ において、辺 $P_{n-1}P_n$ を底辺にとると、高さは点 Q_n と x 軸との距離に等しい。

したがって、三角形 $P_{n-1}P_nQ_n$ の面積 S_n は、

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2}\cdot\left\{n\pi - (n-1)\pi\right\}\cdot\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}\right| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\left(n-\frac{3}{4}\right)\pi}\end{aligned}$$

である。したがって、数列 $\{S_n\}$ は公比 $e^{-\pi}$ の等比数列であるから、 $|e^{-\pi}| < 1$ より無限等比級数

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は収束し、その和は、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}S_n &= \frac{S_1}{1-e^{-\pi}} \\ &= \frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-1}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi e^{\frac{3}{4}\pi}}{2\sqrt{2}\left(e^{\pi}-1\right)}\end{aligned}$$

である。

(4)

$$f(x)+g(x) = e^{-x}(\sin x+\cos x) \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned}\left\{f(x)+g(x)\right\}' &= -e^{-x}(\sin x+\cos x) + e^{-x}(\cos x-\sin x) \\ &= -2e^{-x}\sin x \\ &= -2f(x)\end{aligned}$$

が成立する。また、この等式から、

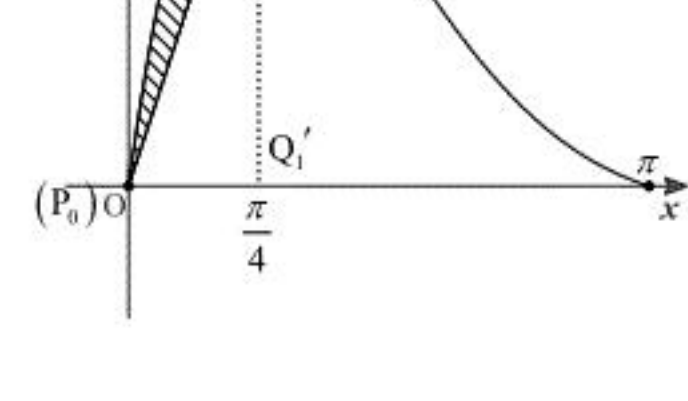
$$\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)\}+C$$

が成り立つ。ここで C は積分定数である。

(5)

$$\begin{aligned}f''(x) &= -e^{-x}(\cos x-\sin x) + e^{-x}(-\sin x-\cos x) \\ &= -2e^{-x}\cos x\end{aligned}$$

より、 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ で $f''(x) < 0$ なので、この範囲で $f(x)$ は上に凸である。よって、領域 D は下図のようになる。



ここで点 Q_1 から x 軸に下ろした垂線の足を Q_1' とし、曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)、 x 軸、直線

Q_1Q_1' で囲まれた部分を D_1 とし、その面積を S とする。このとき領域 D の面積は S から三角

形 OQ_1Q_1' の面積を引いたものである。(4)より、

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)\}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{\pi}{4}\right)+g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} + \frac{1}{2}\{f(0)+g(0)\} \\ &= -\frac{1}{2}\left\{e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)\right\} + \frac{1}{2}\{e^0(\sin 0+\cos 0)\} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

であるから、領域 D の面積は、

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}-\frac{\sqrt{2}}{16}\pi e^{-\frac{\pi}{4}}$$

である。次に、領域 D 、 D_1 、三角形 OQ_1Q_1' を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積をそれぞれ V 、 V_1 、 V_2 とすると、 $V = V_1 - V_2$ が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned}V_1 &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{f(x)\right\}^2dx \\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(e^{-2x}\sin^2x\right)dx \\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{e^{-2x}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\right\}dx \\ &= \frac{\pi}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-2x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(e^{-2x}\cos 2x\right)dx\right\}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-2x}dx &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $t = 2x$ と置換すると、 $dx = \frac{1}{2}dt$ であり、対応は以下のようになる。

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$
t	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

したがって、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-2x}\cos 2xdx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-t}\cos tdt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\left\{f(x)-g(x)\right\}' &= \left(-e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x\right) - \left(-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x\right) \\ &= 2e^{-x}\cos x \\ &= 2g(x)\end{aligned}$$

より、

$$\int g(x)dx = \frac{1}{2}\{f(x)-g(x)\}+C'$$

が成り立つ。ここで C' は積分定数である。したがって、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx &= \frac{1}{4}\left[f(x)-g(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4}\left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}-\frac{1}{4}\{f(0)-g(0)\} \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}-e^{-\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}(\sin 0-\cos 0) \\ &= \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{\pi}{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\right)\right\} \\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}e^{-\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

である。また、底面の円の半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$ 、高さ $\frac{\pi}{4}$ の円錐を考えて、

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi^2}{24}e^{-\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

であるから、求める体積は、

$$\begin{aligned}V &= V_1 - V_2 \\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}e^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi^2}{24}e^{-\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

である。

〔4〕

(1)

$\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}$ のとき、 $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right), B\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right)$ であるから、線分 AB の中点の座標は、

$$\left(\frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2}, \frac{\frac{1}{8} + \frac{9}{8}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$$

である。したがって、 $(p, q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$ である。また、線分 AB の長さは、

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left\{\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^2 + \left\{\frac{9}{8} - \frac{1}{8}\right\}^2} \\ &= \sqrt{4+1} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (p, q) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right), \quad AB = \sqrt{5}$$

(2)

$p = -1, q = \frac{5}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = -1 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}\right) = \frac{5}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ (-2)^2 - 2\alpha\beta = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha\beta = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-2)^2 - 4 \cdot (-3) \\ &= 16 \end{aligned}$$

であり、 $\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0$ より、

$$\beta - \alpha = 4$$

と求まる。以上より、

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \frac{(\beta + \alpha)^2 (\beta - \alpha)^2}{4}} \\ &= \sqrt{4^2 + \frac{(-2)^2 \cdot 4^2}{4}} \\ &= \sqrt{16+16} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha\beta = -3, \quad AB = 4\sqrt{2}$$

(3)

(2)と同様にして求める。まず、与えられた条件から、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = p \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}\right) = q \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2p \\ \alpha^2 + \beta^2 = 4q \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2p \\ (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4q \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2p \\ (2p)^2 - 2\alpha\beta = 4q \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2p \\ \alpha\beta = 2p^2 - 2q \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $\beta - \alpha > 0$ より、

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{(2p)^2 - 4(2p^2 - 2q)} \\ &= \sqrt{8q - 4p^2} \\ &= 2\sqrt{2q - p^2} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \frac{(\beta + \alpha)^2 (\beta - \alpha)^2}{4}} \\ &= \sqrt{\left(2\sqrt{2q - p^2}\right)^2 + \frac{(2p)^2 \left(2\sqrt{2q - p^2}\right)^2}{4}} \\ &= \sqrt{4(2q - p^2) + p^2 \cdot 4(2q - p^2)} \\ &= 2\sqrt{(p^2 + 1)(2q - p^2)} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \alpha\beta = 2p^2 - 2q, \quad AB = 2\sqrt{(p^2 + 1)(2q - p^2)}$$

(4)

$AB = \frac{5}{2}$ であるから、(3)より、

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} &= 2\sqrt{(p^2 + 1)(2q - p^2)} \\ &\Leftrightarrow \frac{25}{4} = 4(p^2 + 1)(2q - p^2) \quad (\because \text{両辺} 0 \text{ 以上}) \\ &\Leftrightarrow 2q - p^2 = \frac{25}{16(p^2 + 1)} \quad (\because p^2 + 1 > 0) \\ &\Leftrightarrow q = \frac{25}{32(p^2 + 1)} + \frac{p^2}{2} \\ &\Leftrightarrow q = \frac{25}{32(p^2 + 1)} + \frac{p^2 + 1}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。 $\frac{25}{32(p^2 + 1)} > 0, \frac{p^2 + 1}{2} > 0$ より、相加相乗平均の大小関係から、

$$\begin{aligned} q &= \frac{25}{32(p^2 + 1)} + \frac{p^2 + 1}{2} - \frac{1}{2} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{25}{32(p^2 + 1)} \cdot \frac{p^2 + 1}{2}} - \frac{1}{2} \\ &= 2\sqrt{\frac{25}{64}} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、等号成立は、

$$\begin{aligned} \frac{25}{32(p^2 + 1)} &= \frac{p^2 + 1}{2} \\ &\Leftrightarrow (p^2 + 1)^2 = \frac{25}{16} \\ &\Leftrightarrow p^2 + 1 = \frac{5}{4} \quad (\because p^2 + 1 > 0) \\ &\Leftrightarrow p^2 = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow p = \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるときである。よって、 $p = \pm \frac{1}{2}$ のとき、 q は最小値 $\frac{3}{4}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad q = \frac{25}{32(p^2 + 1)} + \frac{p^2}{2}$$

$$q \text{ の最小値: } \frac{3}{4} \quad (p = \pm \frac{1}{2} \text{ のとき})$$