

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ		
	$4\bar{x}-2$	$4s_x$	9		
(2)	エ	オ	カ	キ	
	8	429	8	3	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (4x_i - 2) \\ &= \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \cdot 2n \\ &= 4\bar{x} - 2\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}s_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{(4x_i - 2) - (4\bar{x} - 2)\}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 16(x_i - \bar{x})^2 \\ &= 16 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= 16s_x^2\end{aligned}$$

であるから、 $s_y = 4s_x$ となる。また、 $|d_i| > 2s_x$ を満たす i が 2 個あるとき、その 2 つの i をそれぞれ l, m ($l < m$) とすると、

$$\begin{aligned}s_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2 \\ &\geq \frac{1}{n} (d_l^2 + d_m^2) \\ &> \frac{1}{n} \{(2s_x)^2 + (2s_x)^2\} \\ &= \frac{8}{n} s_x^2\end{aligned}$$

より、 $s_x^2 > \frac{8}{n} s_x^2$ となる。 $s_x^2 = 0$ のときこれは成り立たないから $s_x^2 > 0$ であり、よって

$$\begin{aligned}1 &> \frac{8}{n} \\ \therefore n &> 8\end{aligned}$$

が得られる。 n は整数なので、これは $n \geq 9$ と同値である。逆に $n \geq 9$ であるとき、

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 = \cdots = x_{n-2} = 0 \\ x_{n-1} &= -1 \\ x_n &= 1\end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{-1+1}{n} = 0 \\ s_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \{(-1)^2 + 1^2\} \\ &= \frac{2}{n} \\ \therefore s_x &= \sqrt{\frac{2}{n}}\end{aligned}$$

となる。このとき、 $n > 8$ より、 $i = n-1, n$ について

$$2s_x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = 1 = |d_i|$$

が成り立つ。よって、 $n \geq 9$ のとき確かに条件を満たすデータ $x_1, \dots, x_n$ が存在する。以上より、求める n の範囲は $n \geq 9$ である。

(2)

$ab = 56$ を満たす正の整数の組 (a, b) の個数を求める。 $ab = 56$ のとき、 a は 56 の正の約数である。逆に、 a は 56 の正の約数ならば、 $b = \frac{56}{a}$ は正の整数であり、 $ab = 56$ を満たす (a, b) が定まる。よって、 $ab = 56$ を満たす正の整数の組 (a, b) の個数は、56 の正の約数の個数に等しい。ここで、 $56 = 2^3 \cdot 7$ より、56 の正の約数の個数は、

$$(3+1) \cdot (1+1) = 8$$

より 8 個となるので、 $ab = 56$ を満たす (a, b) の組は 8 組である。

次に、1 から 1000 までの整数のうち 56 と互いに素であるものの個数を求める。56 と互いに素であることは、2 の倍数でも 7 の倍数でもないことと同値である。1 から 1000 までの整数のうち 2 の倍数は、

$$1000 \div 2 = 500$$

より 500 個あり、7 の倍数は、

$$1000 \div 7 = 142 \text{ あまり } 6$$

より 142 個ある。また、2 の倍数かつ 7 の倍数である、すなわち 14 の倍数であるものは、

$$1000 \div 14 = 71 \text{ あまり } 6$$

より 71 個ある。以上より、1 から 1000 までの整数のうち 56 と互いに素であるものの個数は、

$$1000 - 500 - 142 + 71 = 429 \text{ (個)}$$

となる。

最後に、 $(2x+y)(3x-y) = 56$ を満たす整数の組 (x, y) を求める。 x, y はともに整数であるので、 $2x+y, 3x-y$ もともに整数となる。また、 $(2x+y) + (3x-y) = 5x$ より、2 数の和が 5 の倍数であることが必要である。したがって、 $(2x+y)(3x-y) = 56$ を満たすためには、

$$(2x+y, 3x-y) = (\pm 2, \pm 28), (\pm 7, \pm 8), (\pm 8, \pm 7), (\pm 28, \pm 2) \text{ (複号同順)}$$

であることが必要条件である。このとき、

$$(x, y) = (\pm 6, \mp 10), (\pm 3, \pm 1), (\pm 3, \pm 2), (\pm 6, \pm 16) \text{ (複号同順)}$$

となり、 x, y がともに整数であることを満たす。したがって、 x, y がともに整数である

(x, y) の組は 8 組である。このうち、 x, y がともに正である組は、

$$(x, y) = (3, 1), (3, 2), (6, 16)$$

の 3 組である。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	$-t^3+3t^2$	-16	4	
(2)	エ	オ	カ	キ
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{27}$	$-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$

〔解説〕

(1)

$x>0, y>0$ に注意すると

$$\begin{aligned} xy &= 27 \\ \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3 y &= 3 \\ \Leftrightarrow \log_3 y &= 3-t \end{aligned}$$

である。これを $z=(\log_3 x)^2(\log_3 y)$ に代入すると、

$$\begin{aligned} z &= (\log_3 x)^2(\log_3 y) \\ &= t^2(3-t) \\ &= -t^3+3t^2 \end{aligned}$$

が得られる。また、

$$\begin{aligned} x &\geq 3 \\ \Leftrightarrow t &\geq 1 \end{aligned}$$

であり、 $xy=27$ のとき、

$$\begin{aligned} y &\geq \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \log_3 y &\geq -1 \\ \Leftrightarrow 3-t &\geq -1 \\ \Leftrightarrow t &\leq 4 \end{aligned}$$

となるため、 x, y が $x \geq 3, y \geq \frac{1}{3}$ 、 $xy=27$ を満たしながら動くときの t の範囲は $1 \leq t \leq 4$

である。 $z=-t^3+3t^2$ を t で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -3t^2+6t \\ &= -3t(t-2) \end{aligned}$$

であるから、 $1 \leq t \leq 4$ における z の増減表は以下のようになる。

t	1	...	2	...	4
$\frac{dz}{dt}$		+	0	-	
z	2	↗	4	↘	-16

したがって、 z の取りうる値の範囲は、 $-16 \leq z \leq 4$ である。

(2)

$n+1$ 分後にあかり B が点灯しているためには、 n 分後にあかり B が消灯している必要がある。 n 分後にあかり B が消灯している確率は、 $1-p_n$ と表せる。またそのとき、 n 分後に点灯しているあかり以外のどのあかりについても $n+1$ 分後に点灯する確率は同様に確からしく、

$\frac{1}{3}$ であるため、 $n+1$ 分後にあかり B が点灯している確率 p_{n+1} は、

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}(1-p_n) \qquad \cdots \text{①}$$

である。はじめの時刻はあかり A が点灯しているため、1 分後にあかり B が点灯している確

率 p_1 は $\frac{1}{3}$ である。また、①に $n=1, 2$ を代入することで、

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} \\ p_3 &= \frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{9}\right) = \frac{7}{27} \end{aligned}$$

が得られる。さらに、①を変形すると、

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$$

となるため、 $\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ 、公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列である。したがって、

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{4} &= \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow p_n &= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

[3]

(1)

$$\begin{aligned}(x+1)(x-3) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x &\leq -1, 3 \leq x\end{aligned}$$

であるから、 $x \leq -1, 3 \leq x$ のとき、

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+1)(x-3) + 2x - 1 \\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

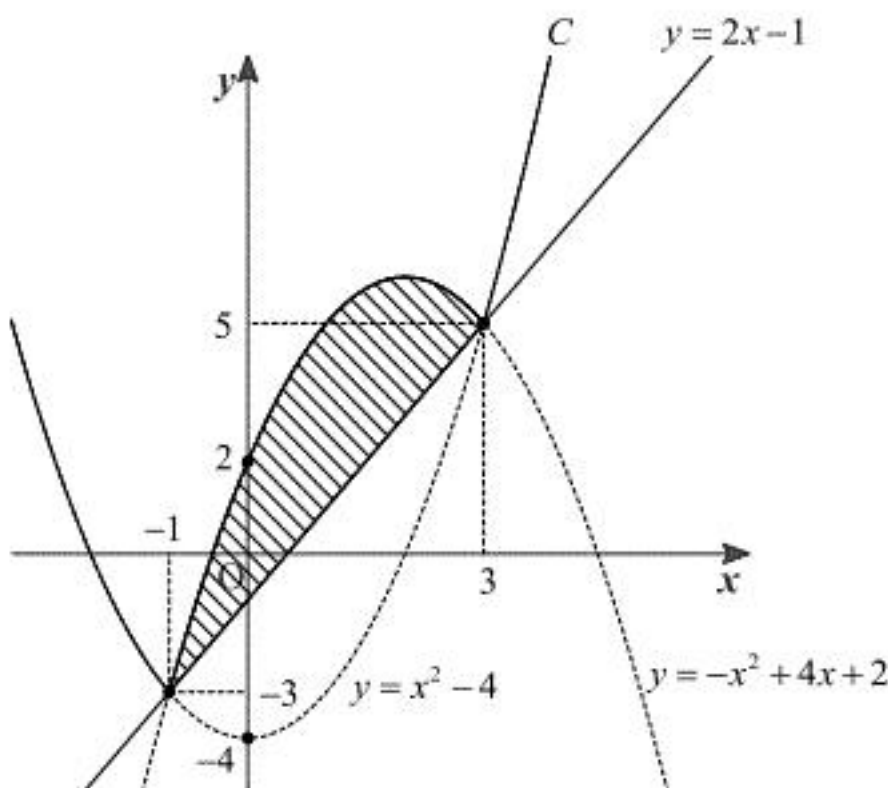
であり、 $-1 < x < 3$ のとき

$$\begin{aligned}f(x) &= -(x+1)(x-3) + 2x - 1 \\ &= -x^2 + 4x + 2 \\ &= -(x-2)^2 + 6\end{aligned}$$

である。また、 $y = f(x)$ と $y = 2x - 1$ を連立して解くと、

$$\begin{aligned}|(x+1)(x-3)| + 2x - 1 &= 2x - 1 \\ \Leftrightarrow |(x+1)(x-3)| &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, 3\end{aligned}$$

となる。したがって、 $y = 2x - 1$ と C のグラフは下図のようになる。



よって、 $y = 2x - 1$ と C で囲まれた部分は上図の斜線部であり、その面積は、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 \{-x^2 + 4x + 2 - (2x - 1)\} dx &= -\int_{-1}^3 (x+1)(x-3) dx \\ &= \frac{\{3 - (-1)\}^3}{6} \\ &= \frac{32}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{32}{3}$

(2)

$-1 < x < 3$ において、

$$f'(x) = -2x + 4$$

であるため、 $(a, f(a))$ ($-1 < a < 3$) での曲線 C の接線 ℓ の方程式は、

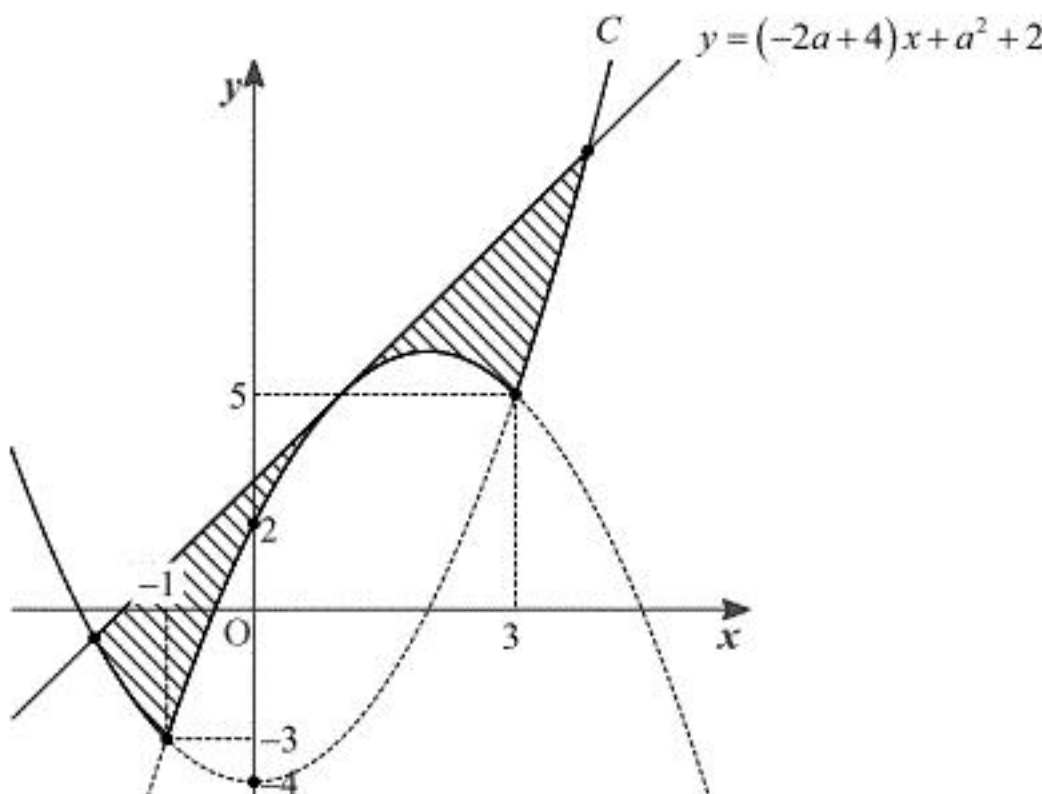
$$\begin{aligned}y - f(a) &= f'(a)(x - a) \\ \Leftrightarrow y &= (-2a + 4)(x - a) + (-a^2 + 4a + 2) \\ \Leftrightarrow y &= (-2a + 4)x + a^2 + 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $y = (-2a + 4)x + a^2 + 2$

(3)

ℓ と C は下図のような位置関係になり、点 P と異なり、 x 座標が $x \leq -1, 3 \leq x$ の範囲にあるような交点が必ず 2 つ存在する。



ℓ と C の交点のうち、 $x \leq -1, 3 \leq x$ であるものの x 座標は、

$$\begin{aligned}x^2 - 4 &= (-2a + 4)x + a^2 + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + (2a - 4)x - a^2 - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -a + 2 \pm \sqrt{2a^2 - 4a + 10}\end{aligned}$$

を満たす。したがって、点 P 以外の ℓ と C の交点の x 座標は、 $x = -a + 2 \pm \sqrt{2a^2 - 4a + 10}$ となる。

(答) $-a + 2 \pm \sqrt{2a^2 - 4a + 10}$

(4)

$\alpha = -a + 2 - \sqrt{2a^2 - 4a + 10}$, $\beta = -a + 2 + \sqrt{2a^2 - 4a + 10}$ とおく。 $a = 1$ を代入することで、

$\alpha = 1 - 2\sqrt{2}$, $\beta = 1 + 2\sqrt{2}$ を得る。曲線 C と接線 ℓ で囲まれた部分は(3)の図の斜線部である。これは、 ℓ と $y = x^2 - 4$ で囲まれた部分から、 $y = x^2 - 4$ と $y = -x^2 + 4x + 2$ で囲まれた部分を取り除いた部分であるため、求める面積は、

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha}^{\beta} \{(-2a + 4)x + a^2 + 2 - (x^2 - 4)\} dx - \int_{-1}^3 \{-x^2 + 4x + 2 - (x^2 - 4)\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx + 2 \int_{-1}^3 (x+1)(x-3) dx \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} - \frac{2\{3 - (-1)\}^3}{6} \\ &= \frac{64(\sqrt{2} - 1)}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{64(\sqrt{2} - 1)}{3}$