

【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ
(1)	$-\frac{1}{4}$	0	3	5
(2)	オ	カ	キ	
	$\frac{16}{81}$	$\frac{41}{144}$	$\frac{50}{369}$	

【解説】

(1)

$y=|x-1|-a$ のグラフが表す折れ線と曲線 $y=\frac{1}{4}x^2$ がちょうど4つの共有点をもつことは

$y=-\frac{1}{4}x^2+|x-1|$ のグラフと $y=a$ のグラフがちょうど4つの共有点をもつことと同値である。

[1] $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{4}x^2 + |x-1| \\ &= -\frac{1}{4}x^2 + x - 1 \\ &= -\frac{1}{4}(x-2)^2\end{aligned}$$

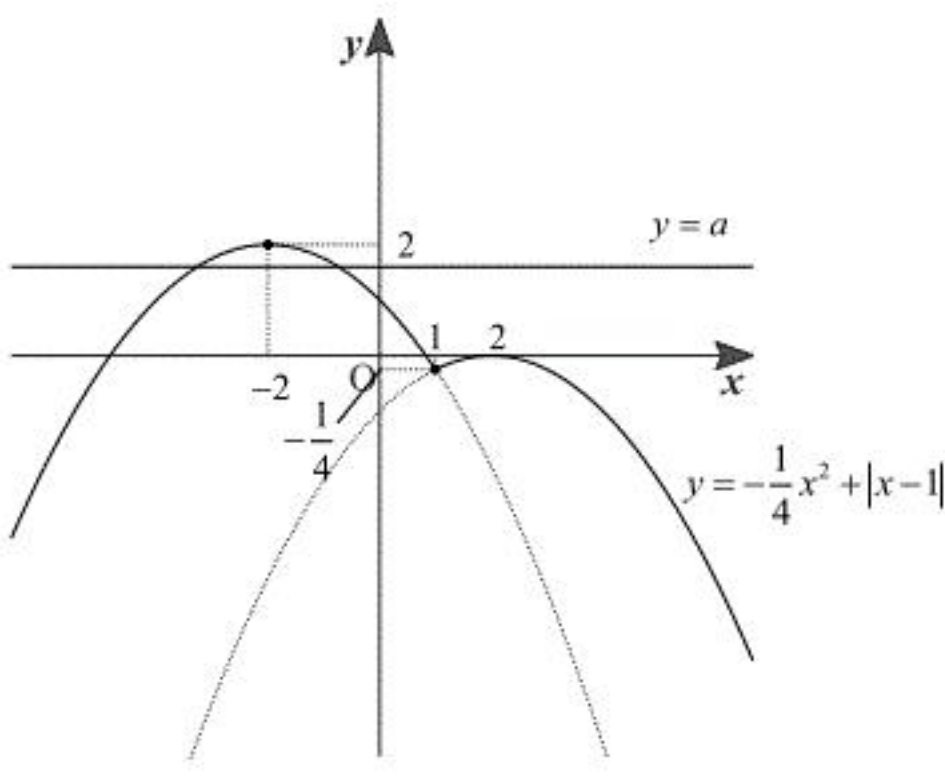
である。

[2] $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ のとき

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{4}x^2 + |x-1| \\ &= -\frac{1}{4}x^2 - x + 1 \\ &= -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 2\end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より、 $y=-\frac{1}{4}x^2+|x-1|$ のグラフは以下のようになる。



グラフより、 $y=-\frac{1}{4}x^2+|x-1|$ と $y=a$ がちょうど4つの共有点をもつような a の取りうる値

の範囲は

$$-\frac{1}{4} < a < 0$$

である。また直線 $x+2y=b$ と $y=||x-1|-2|$ のグラフがちょうど3つの共有点をもつことは、

$y=\frac{b}{2}$ のグラフと $y=||x-1|-2|+\frac{x}{2}$ のグラフがちょうど3つの共有点をもつことと同値である。

[1] $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned}y &= ||x-1|-2| + \frac{x}{2} \\ &= |(x-1)-2| + \frac{x}{2} \\ &= |x-3| + \frac{x}{2}\end{aligned}$$

である。

[i] $x-3 \geq 0$ のとき、つまり $3 \leq x$ であるとき

$$\begin{aligned}y &= ||x-1|-2| + \frac{x}{2} \\ &= (x-3) + \frac{x}{2} \\ &= \frac{3}{2}x - 3\end{aligned}$$

となる。

[ii] $x-3 < 0$ のとき、つまり $1 \leq x < 3$ であるとき

$$\begin{aligned}y &= ||x-1|-2| + \frac{x}{2} \\ &= -(x-3) + \frac{x}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x + 3\end{aligned}$$

となる。

[2] $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ のとき

$$\begin{aligned}y &= ||x-1|-2| + \frac{x}{2} \\ &= |-(x-1)-2| + \frac{x}{2} \\ &= |-x-1| + \frac{x}{2}\end{aligned}$$

である。

[i] $-x-1 \geq 0$ のとき、つまり $x \leq -1$ であるとき

$$\begin{aligned}y &= ||x-1|-2| + \frac{x}{2} \\ &= (-x-1) + \frac{x}{2} \\ &= -\frac{x}{2} - 1\end{aligned}$$

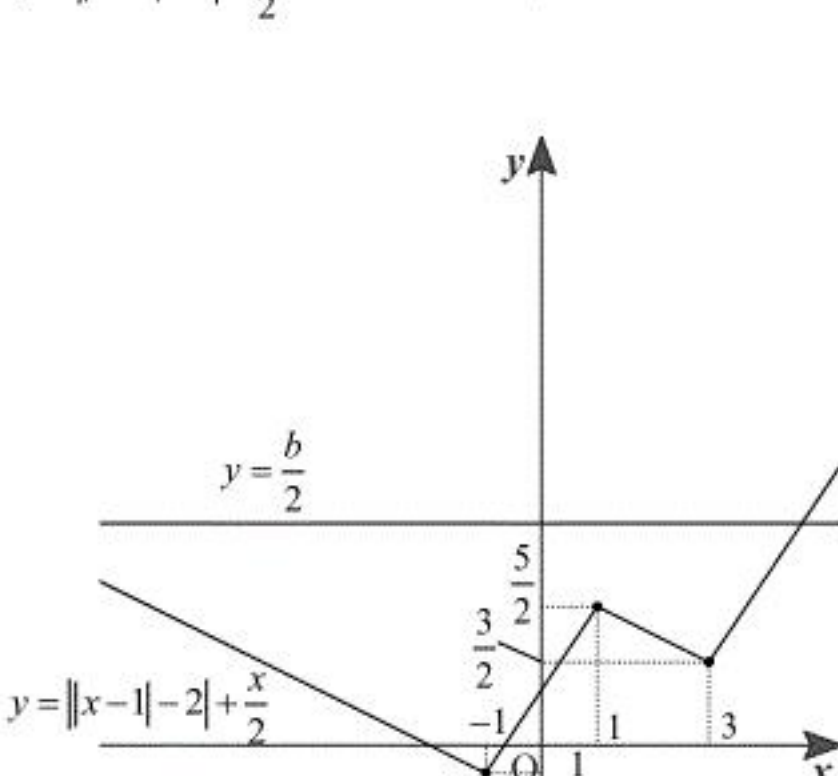
となる。

[ii] $-x-1 < 0$ のとき、つまり $-1 < x < 1$ であるとき

$$\begin{aligned}y &= ||x-1|-2| + \frac{x}{2} \\ &= -(-x-1) + \frac{x}{2} \\ &= \frac{3}{2}x + 1\end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、 $y=||x-1|-2|+\frac{x}{2}$ のグラフは以下のようになる。



グラフより、 $y=||x-1|-2|+\frac{x}{2}$ と $y=\frac{b}{2}$ がちょうど3つの共有点をもつような b の値は、

$$\frac{b}{2} = \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \Leftrightarrow b = 3, 5$$

である。

(2)

$X \leq 4$ となるのは、4個のサイコロそれぞれの目が、1, 2, 3, 4のいずれかであるときである。

よってその確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

である。 $Y=2$ となるのは、4個のサイコロそれぞれの目が、2, 3, 4, 5, 6のいずれかであり、

そのうち少なくとも1個のサイコロの目が2を出しているときである。この確率は、4個の

サイコロそれぞれの目が、2, 3, 4, 5, 6のいずれかである確率から、4個のサイコロそれぞれの

目が、3, 4, 5, 6のいずれかである確率を引いたものに等しい。よって求める確率は、

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 - \left(\frac{4}{6}\right)^4 = \frac{369}{1296} = \frac{41}{144}$$

である。 $Y=2$ かつ $X=4$ となるのは、4個のサイコロそれぞれの目が、2, 3, 4のいずれかであり、

そのうち少なくとも1個のサイコロの目が2を出しており、また少なくとも1個のサイ

コロの目が4を出しているときである。この確率は、4個のサイコロそれぞれの目が、

2, 3, 4のいずれかである確率から、4個のサイコロそれぞれの目が、2, 3のいずれかである

確率と、4個のサイコロそれぞれの目が、3, 4のいずれかである確率を引き、引いた両方に

含まれる、4個のサイコロの目が全て3である確率を足したものである。よってこの確率は、

$$\left(\frac{3}{6}\right)^4 - \left(\frac{2}{6}\right)^4 - \left(\frac{2}{6}\right)^4 + \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{50}{1296}$$

である。ゆえに、 $Y=2$ であったとき、 $X=4$ である条件付き確率は、

$$\frac{\frac{50}{1296}}{\frac{369}{1296}} = \frac{50}{369}$$

である。

【2】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	
	$-4a+\frac{16}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	
(2)	エ	オ	カ	キ
	$-\frac{19}{2}$	2	$\frac{1}{4}$	9

【解説】

(1)

$\int_0^2 tf(t)dt$ は定数であるので、この値を k とおくと、

$$f(x)=ax^2-2x+k \qquad \cdots \textcircled{1}$$

である。これより、

$$\begin{aligned} k &= \int_0^2 tf(t)dt \\ \Leftrightarrow k &= \int_0^2 t(at^2-2t+k)dt \\ \Leftrightarrow k &= \int_0^2 (at^3-2t^2+kt)dt \\ \Leftrightarrow k &= \left[\frac{a}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{k}{2}t^2 \right]_0^2 \\ \Leftrightarrow k &= 4a - \frac{16}{3} + 2k \\ \Leftrightarrow k &= -4a + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

が成立するので、

$$\int_0^2 tf(t)dt = -4a + \frac{16}{3}$$

である。 $k = -4a + \frac{16}{3}$ を①に代入すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 - 2x - 4a + \frac{16}{3} \\ &= a\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 - 4a - \frac{1}{a} + \frac{16}{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。 $a > 0$ より、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{a}$ で最小値

$$m = -\left(4a + \frac{1}{a}\right) + \frac{16}{3}$$

をとる。 $4a + \frac{1}{a}$ が最小値をとるとき、 m は最大値をとる。 $4a > 0, \frac{1}{a} > 0$ であるので、相加相乗平均の大小関係より、

$$\begin{aligned} 4a + \frac{1}{a} &\geq 2\sqrt{4a \cdot \frac{1}{a}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

が成立する。ただし、等号成立条件は $4a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \quad (\because a > 0)$ である。よって、 $4a + \frac{1}{a}$ は

$a = \frac{1}{2}$ のとき、最小値 4 をとり、このとき m は最大値 $-4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$ をとる。

(2)

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sum_{n=1}^{18} a_n = 135 \\ \sum_{n=19}^{36} a_n = 783 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot (a_1 + a_{18}) = 135 \\ \frac{1}{2} \cdot (36 - 19 + 1) \cdot (a_{19} + a_{36}) = 783 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 9\{a_1 + (a_1 + 17d)\} = 135 \\ 9\{(a_1 + 18d) + (a_1 + 35d)\} = 783 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 2a_1 + 17d = 15 \\ 2a_1 + 53d = 87 \end{cases} \end{aligned}$$

である。これを解いて、

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{19}{2} \\ d = 2 \end{cases}$$

が得られる。また、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^6 b_n &= 91 \\ \Leftrightarrow b_1 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} &= 91 \\ \therefore b_1 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。このとき、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d(n-1) \\ &= 2n - \frac{23}{2} \\ b_n &= \frac{1}{4} \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

であるので、 $c_n = |a_n - \log_3 b_n|$ とおくと、

$$\begin{aligned} c_n &= \left| \left(2n - \frac{23}{2} \right) - \log_3 \frac{3^{n-1}}{4} \right| \\ &= \left| 2n - \frac{23}{2} - \{(n-1) - 2\log_3 2\} \right| \\ &= \left| n - \frac{21}{2} + 2 \cdot 0.63 \right| \\ &= |n - 9.24| \end{aligned}$$

となる。

[1] $n \leq 9$ のとき

$n - 9.24 < 0$ であるので、

$$c_n = -(n - 9.24)$$

であり、 c_n は単調減少で、最小値は $n = 9$ のとき $c_9 = 0.24$ である。

[2] $n \geq 10$ のとき

$n - 9.24 > 0$ であるので、

$$c_n = n - 9.24$$

であり、 c_n は単調増加で、最小値は $n = 10$ のとき $c_{10} = 0.76$ である。

以上[1], [2]より、 c_n の値が最小になる n の値は

$$n = 9$$

である。

[3]

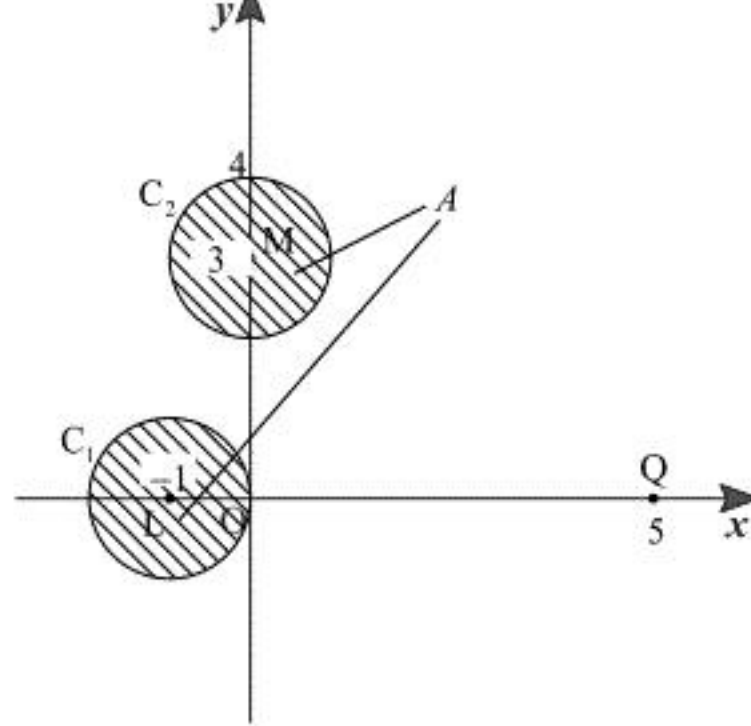
(1)

$$\begin{aligned} & (x^2+2x+y^2)(x^2+y^2-6y+8) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2+2x+y^2 \geq 0 \text{ かつ } x^2+y^2-6y+8 \leq 0) \text{ または } (x^2+2x+y^2 \leq 0 \text{ かつ } x^2+y^2-6y+8 \geq 0) \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2+2x+y^2=0 \\ x^2+y^2-6y+8=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x+1)^2+y^2=1 \\ x^2+(y-3)^2=1 \end{cases} \end{aligned}$$

より、中心 $L(-1, 0)$ 、半径1の円を C_1 、中心 $M(0, 3)$ 、半径1の円を C_2 とすると、領域 A が表す部分は、(C_1 の外部かつ C_2 の内部)または(C_1 の内部かつ C_2 の外部)である。ただし C_1 上、 C_2 上はすべて含まれる。円 C_1 、 C_2 について、一方の円はもう一方の円の外部にあるため、領域 A が表す部分は、円 C_1 、 C_2 の内部 (ただし円 C_1 、 C_2 上は含む) となり、図は以下のようになる。



点 P が領域 A を動くとき、2 点 PQ 間の距離 r の取りうる値の範囲を D とすると、
 r が D に含まれる
 $\Leftrightarrow PQ=r$ となるような点 P が領域 A 上にある
 $\Leftrightarrow$ 中心が点 Q 、半径が r の円が円 C_1 、 C_2 の内部(周上含む)と共有点を持つ

である。 LQ 、 MQ 間の距離はそれぞれ $5-(-1)=6$ 、 $\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$ であるため、中心が点 Q 、半径が r の円が円 C_1 、 C_2 に外接するのは、それぞれ、 $r=6-1$ 、 $\sqrt{34}-1$ のときである。 $\sqrt{34}<6$ であるので、 r を 0 から大きくしていったとき、 $r=\sqrt{34}-1$ のとき初めて、中心が点 Q 、半径が r の円が領域 A と共有点をもつ。よって、距離 PQ の最小値は

$$\sqrt{34}-1$$

である。

(答) $\sqrt{34}-1$

(2)

(1)と同様に、点 P が領域 A を動くとき、 $k=x+y$ の取りうる値の範囲を E とすると、
 k が E に含まれる
 $\Leftrightarrow x+y=k$ となるような点 P が領域 A 上にある
 $\Leftrightarrow$ 直線 $x+y-k=0$ が円 C_1 、 C_2 の内部(周上含む)と共有点を持つ

である。

$$\begin{aligned} & \text{直線 } x+y-k=0 \text{ が円 } C_1 \text{ の内部(周上含む)と共有点を持つ} \\ \Leftrightarrow & \text{直線 } x+y-k=0 \text{ と点 } L(-1, 0) \text{ の距離が円 } C_1 \text{ の半径である } 1 \text{ 以下である} \\ \Leftrightarrow & \frac{|-1+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & -\sqrt{2} \leq -1-k \leq \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & -1-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

であり、同様に、

$$\begin{aligned} & \text{直線 } x+y-k=0 \text{ が円 } C_2 \text{ の内部(周上含む)と共有点を持つ} \\ \Leftrightarrow & \text{直線 } x+y-k=0 \text{ と点 } M(0, 3) \text{ の距離が円 } C_2 \text{ の半径の } 1 \text{ 以下である} \\ \Leftrightarrow & \frac{|0+3-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & -\sqrt{2} \leq 3-k \leq \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & 3-\sqrt{2} \leq k \leq 3+\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。 $(3-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)=4-2\sqrt{2}=\sqrt{16}-\sqrt{12}>0$ より、 k の取りうる値の範囲は、

$$-1-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}-1, \quad 3-\sqrt{2} \leq k \leq 3+\sqrt{2}$$

である。

(答) $-1-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}-1, \quad 3-\sqrt{2} \leq k \leq 3+\sqrt{2}$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + x^2y + xy^2 - 9x - 9y &= \frac{1}{3}(x+y)^3 - 9(x+y) \\ &= \frac{1}{3}k^3 - 9k \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}k^3 - 9k$

(4)

$$f(k) = \frac{1}{3}k^3 - 9k$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(k) &= k^2 - 9 \\ &= (k+3)(k-3) \end{aligned}$$

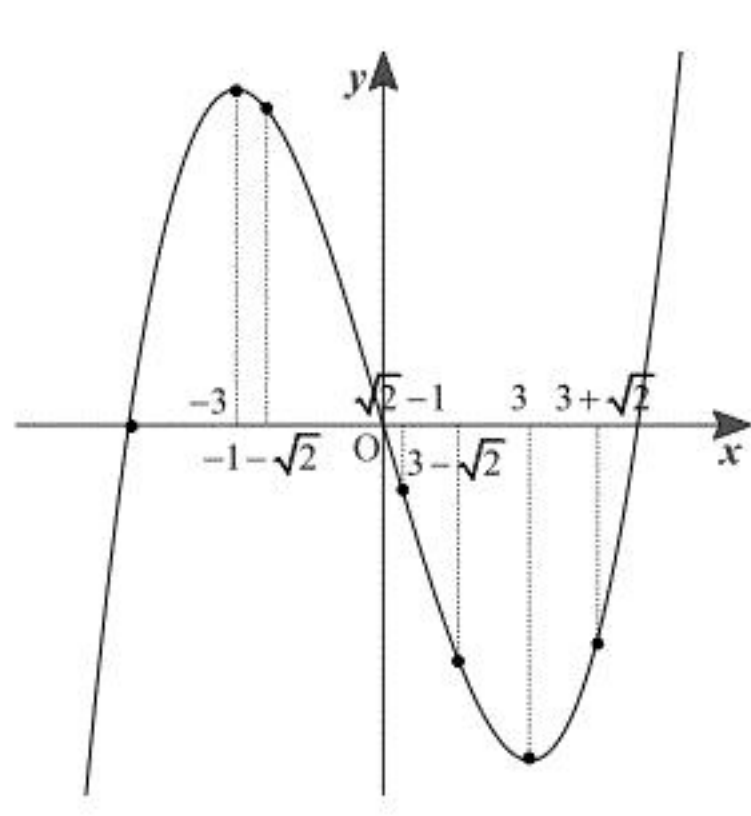
であるため、 $f'(k)=0$ となるのは $k=\pm 3$ のときである。点 P が領域 A を動くとき、 k の取りうる値の範囲は(3)より

$$-1-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}-1, \quad 3-\sqrt{2} \leq k \leq 3+\sqrt{2}$$

であるので、この定義域で $f(k)$ の増減表を書くと以下のようになる。

k	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$(\cdots)$	$3-\sqrt{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$	$3+\sqrt{2}$
$f'(k)$	$-$	$-$	$-$	$(-)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(k)$	$f(-1-\sqrt{2})$	$\searrow$		$(\searrow)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	$f(3+\sqrt{2})$

また、 $y=f(x)$ のグラフは以下のようになる。



よって、 $-1-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}-1$ 、 $3-\sqrt{2} \leq k \leq 3+\sqrt{2}$ における $f(k)$ の最小値は、 $k=3$ のとき、

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 9 \cdot 3 = -18$$

である。最大値は、増減表より、 $k=-1-\sqrt{2}$ のときの

$$\begin{aligned} f(-1-\sqrt{2}) &= \frac{1}{3}(-1-\sqrt{2})^3 - 9(-1-\sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{3}(-2\sqrt{2}-6-3\sqrt{2}-1)+9+9\sqrt{2} \\ &= \frac{20}{3} + \frac{22}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

または、 $k=3+\sqrt{2}$ のときの

$$\begin{aligned} f(3+\sqrt{2}) &= \frac{1}{3}(3+\sqrt{2})^3 - 9(3+\sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{3}(2\sqrt{2}+18+27\sqrt{2}+27)-27-9\sqrt{2} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{2}-12 \end{aligned}$$

であるが、

$$\begin{aligned} f(-1-\sqrt{2}) - f(3+\sqrt{2}) &= \left(\frac{20}{3} + \frac{22}{3}\sqrt{2}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}-12\right) \\ &= \frac{20}{3}\sqrt{2} + \frac{56}{3} \\ &> 0 \end{aligned}$$

より、最大値は $k=-1-\sqrt{2}$ のとき、 $\frac{20}{3} + \frac{22}{3}\sqrt{2}$ である。

(答) 最大値: $\frac{20}{3} + \frac{22}{3}\sqrt{2}$

最小値: -18