

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	$(-2, 5)$	$(34, -80)$	14	$(-16, 40)$
(2)	オ	カ	キ	
	$\frac{7}{72}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{54}$	

【解説】

- (1)
- 方程式 $12x+5y=1$ の整数解の一つは $(x, y)=(3, -7)$ であるから
- $$12 \cdot 3 + 5 \cdot (-7) = 1$$
- が成り立つ。よって
- $$\begin{aligned} 12(x-3) + 5(y+7) &= 0 \\ \Leftrightarrow 12(x-3) &= -5(y+7) \end{aligned} \qquad \cdots \text{①}$$
- が成り立ち、5 と 12 は互いに素な自然数であるから
- $$x = 5k + 3 \quad (k \text{ は整数})$$
- と表すことができる。これを①に代入して
- $$\begin{aligned} 12\{(5k+3)-3\} &= -5(y+7) \\ \Leftrightarrow 12k &= -(y+7) \\ \Leftrightarrow y &= -12k-7 \end{aligned}$$
- を得る。 $|-12k-7|$ が最小となるような k の値は $k=-1$ より、 $|y|$ が最小となる組 (x, y) は
- $$(x, y) = (-2, 5)$$
- である。また、同様に考えて方程式 $12x+5y=8$ の整数解の一つは $(x, y)=(4, -8)$ であるから
- $$(x, y) = (5l+4, -12l-8) \quad (l \text{ は整数})$$
- と表すことができる。よって $|(-12l-8)+76| = |-12l+68|$ が最小になるような l の値は $l=6$ より、 $|y+76|$ が最小となる組 (x, y) は
- $$(x, y) = (34, -80)$$
- である。ここで、 l の値が決まると組 (x, y) は一意に定まるので $x \leq 50$ かつ $y \leq 50$ を満たす組 (x, y) の個数は
- $$\begin{aligned} &\begin{cases} 5l+4 \leq 50 \\ -12l-8 \leq 50 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -\frac{29}{6} \leq l \leq \frac{46}{5} \end{aligned}$$
- を満たす l の個数に等しい。 l は整数であるからこれを満たす l の値は $l=-4, -3, \dots, 9$ の 14 個である。よって求める組 (x, y) の個数は 14 個である。また、 $(x, y)=(5l+4, -12l-8)$ を $\left(\frac{x+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}-10\right)^2$ に代入して整理すると
- $$\begin{aligned} \left(\frac{x+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}-10\right)^2 &= \left\{\frac{(5l+4)+1}{5}\right\}^2 + \left\{\frac{(-12l-8)}{4}-10\right\}^2 \\ &= (l+1)^2 + (-3l-12)^2 \\ &= (l^2+2l+1) + 9(l^2+8l+16) \\ &= 10l^2+74l+145 \\ &= 10\left(l+\frac{37}{10}\right)^2 + 145 - \frac{37^2}{10} \end{aligned}$$
- となる。したがって l は整数より $\left(\frac{x+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}-10\right)^2$ は $l=-4$ のとき最小値をとる。よって求める組 (x, y) は
- $$(x, y) = (-16, 40)$$
- である。
- (2)
- 3つのサイコロの目の出方は 6^3 通りあり、それらはすべて同様に確からしい。 $X=8$ となるような事象を A 、 $Y \leq 10$ となるような事象を B とし、ある事象 C が起こる確率を $P(C)$ のように表すことにする。また、出た3つの目を (a, b, c) (ただし、 $1 \leq a \leq b \leq c \leq 6$) のように表すことにすると、 $X=8$ となるサイコロの目の組は
- $$(1, 1, 6), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3)$$
- であるから、3個のサイコロを区別するとサイコロの目の出方は
- $${}_3C_1 + 3! + 3! + {}_3C_1 + {}_3C_1 = 21 \text{ (通り)}$$
- である。したがって、 $X=8$ である確率は
- $$P(A) = \frac{21}{6^3} = \frac{7}{72}$$
- である。ここで、 $X=8$ となる組のうち $Y \leq 10$ を満たすものは
- $$(1, 1, 6), (1, 2, 5)$$
- より、 $X=8$ かつ $Y \leq 10$ となるサイコロの目の出方は
- $${}_3C_1 + 3! = 9 \text{ (通り)}$$
- であるから
- $$P(A \cap B) = \frac{9}{6^3} = \frac{1}{24}$$
- となる。よって $X=8$ であったとき、 $Y \leq 10$ である条件付き確率を $P_A(B)$ とすると
- $$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{7}{72}} = \frac{3}{7}$$
- である。また、 X は3つのサイコロの出た目の和より $3 \leq X \leq 18$ となるから $XY=48$ を満たす組 (X, Y) は
- $$(X, Y) = (3, 16), (4, 12), (6, 8), (8, 6), (12, 4), (16, 3)$$
- に限られる。以下、それぞれの場合について場合分けをして考える。
- [1] $(X, Y) = (3, 16)$ のとき
- $X=3$ となるサイコロの目の組は
- $$(1, 1, 1)$$
- であるが、このとき $Y=1$ となるため不適である。
- [2] $(X, Y) = (4, 12)$ のとき
- $X=4$ となるサイコロの目の組は
- $$(1, 1, 2)$$
- であるが、このとき $Y=2$ となるため不適である。
- [3] $(X, Y) = (6, 8)$ のとき
- $X=6$ となるサイコロの目の組は
- $$(1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2)$$
- であり、このうち $Y=8$ を満たすのは $(2, 2, 2)$ の 1 通りである。
- [4] $(X, Y) = (8, 6)$ のとき
- $X=8$ となるサイコロの目の組は
- $$(1, 1, 6), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3)$$
- であり、このうち $Y=6$ を満たすのは $(1, 1, 6)$ の ${}_3C_2 = 3$ 通りである。
- [5] $(X, Y) = (12, 4)$ のとき
- $X=12$ となるサイコロの目の組は
- $$(3, 3, 6), (3, 4, 5), (4, 4, 4)$$
- であるが、このうち $Y=4$ を満たすものは存在しないため不適である。
- [6] $(X, Y) = (16, 3)$ のとき
- $X=16$ となるサイコロの目の組は
- $$(5, 5, 6)$$
- であるが、このとき $Y=150$ となるため不適である。
- 以上[1]～[6]は互いに排反な事象であるから、 $XY=48$ である確率は
- $$\frac{0+0+3+1+0+0}{6^3} = \frac{1}{54}$$
- である。

【2】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	
	$\frac{1}{3}t^3-2t^2+4$	$-\frac{20}{3}$	$2+\sqrt{3}$	
(2)	エ	オ	カ	キ
	$\frac{3}{2}r$	-2	$\frac{11}{114}$	$\frac{1}{5}$

【解説】

(1)

$$t=3^x+3^{-x} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}t^2 &= (3^x+3^{-x})^2 \\ \Leftrightarrow t^2 &= 3^{2x}+2+3^{-2x} \\ \Leftrightarrow 3^{2x}+3^{-2x} &= t^2-2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t^3 &= (3^x+3^{-x})^3 \\ \Leftrightarrow t^3 &= 3^{3x}+3\cdot 3^x+3\cdot 3^{-x}+3^{-3x} \\ \Leftrightarrow 3^{3x}+3^{-3x} &= t^3-3t \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と表される。したがって、①、②より y を t の式で表すと

$$\begin{aligned}y &= 3^{3x-1}+3^{-3x-1}-2\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^{-2x}+3^x+3^{-x} \\ &= \frac{1}{3}(t^3-3t)-2(t^2-2)+t \\ &= \frac{1}{3}t^3-2t^2+4\end{aligned}$$

となる。ここで、 $3^x>0, 3^{-x}>0$ であるから相加平均・相乗平均の大小関係より

$$3^x+3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}} \Leftrightarrow t \geq 2$$

が成り立ち、等号成立は

$$\begin{aligned}3^x &= 3^{-x} \\ \Leftrightarrow 3^{2x} &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 0\end{aligned}$$

のときである。よって $t \geq 2$ において

$$\frac{dy}{dt}=t^2-4t$$

より y の増減表は以下のようになる。

t	2	...	4	...
$\frac{dy}{dt}$		-	0	+
y	$-\frac{4}{3}$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって y は $t=4$ のとき最小値

$$\frac{1}{3}\cdot 4^3-2\cdot 4^2+4=-\frac{20}{3}$$

をとる。また、このとき

$$\begin{aligned}t &= 4 \\ \Leftrightarrow 3^x+3^{-x} &= 4 \\ \Leftrightarrow 3^{2x}-4\cdot 3^x+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3^x &= 2\pm\sqrt{3} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となる。 $1^2<3<2^2$ より $1<\sqrt{3}<2$ であるから $0<2-\sqrt{3}<1<2+\sqrt{3}$ であることに注意すると、③を満たす x の値のうち正であるものは

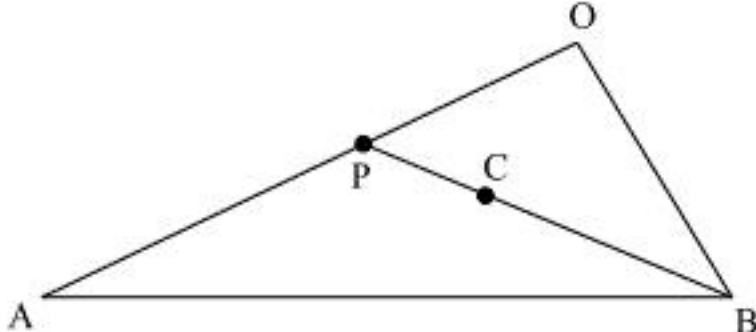
$$x=\log_3(2+\sqrt{3})$$

である。したがって、

$$3^x=2+\sqrt{3}$$

である。

(2)



3点B, C, Pは一直線上にあるから

$$\overrightarrow{BP}=s\overrightarrow{BC}(s \text{ は実数})$$

と表すことができる。したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP} \\ &= \overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{BC} \\ &= \vec{b}+s(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}) \\ &= \vec{b}+s\left\{\left(r\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)-\vec{b}\right\} \\ &= sr\vec{a}+\left(1-\frac{2}{3}s\right)\vec{b}\end{aligned}$$

と表される。また、問題文より $\overrightarrow{OP}=p\vec{a}$ であるから

$$sr\vec{a}+\left(1-\frac{2}{3}s\right)\vec{b}=p\vec{a}$$

が成り立つ。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから係数を比較することで

$$\begin{cases} sr=p \\ 1-\frac{2}{3}s=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=\frac{3}{2}r \\ s=\frac{3}{2} \end{cases}$$

を得る。OA=6, OB=3であり、 $\triangle OAB$ の面積が $4\sqrt{5}$ であることから

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2} &= 4\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow 6^2\cdot 3^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 &= 320 \\ \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} &= \pm 2\end{aligned}$$

とわかる。ここで、 $\angle AOB$ は鈍角より $\cos\angle AOB<0$ であるから、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$$

である。このとき、直線OCと辺ABが直交しているとき

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

が成り立ち、これを整理して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(r\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}|\vec{b}|^2+\left(r-\frac{1}{3}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}-r|\vec{a}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot 3^2+\left(r-\frac{1}{3}\right)\cdot(-2)-r\cdot 6^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{11}{114}\end{aligned}$$

を得る。また直線BCが $\angle OBA$ を2等分しているとき、 $OP:PA=OB:AB$ が成り立つ。ここで、 $\triangle OAB$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}AB^2 &= OA^2+OB^2-2\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &= 6^2+3^2-2\cdot(-2) \\ &= 49\end{aligned}$$

であり、 $AB>0$ より $AB=7$ とわかる。したがって

$$OP:PA=OB:AB=3:7$$

より $p=\frac{3}{10}$ であり、 $p=\frac{3}{2}r$ であるから

$$r=\frac{1}{5}$$

と求まる。

[3]

(1)

a は正の定数であるから

$$f(x)=\begin{cases} 2(x+1)(x-a) & (x<-1, a\leq x) \\ -2(x+1)(x-a) & (-1\leq x<a) \end{cases}$$

となる。まずは放物線 $y=2(x+1)(x-a)$ と曲線 C_2 の $x<-1, a\leq x$ における共有点の x 座標を求める。 $y=2(x+1)(x-a)$ と $y=x(x+1)$ の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} 2(x+1)(x-a) &= x(x+1) \\ \Leftrightarrow (x+1)(2x-2a-x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-2a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, 2a \end{aligned}$$

であり、このうち $x<-1, a\leq x$ を満たすのは $x=2a$ である。同様にして放物線 $y=-2(x+1)(x-a)$ と曲線 C_2 の $-1\leq x<a$ における共有点の x 座標を求める。

$y=-2(x+1)(x-a)$ と $y=x(x+1)$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} -2(x+1)(x-a) &= x(x+1) \\ \Leftrightarrow (x+1)(x+2x-2a) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(3x-2a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, \frac{2}{3}a \end{aligned}$$

であり、これらは $-1\leq x<a$ を満たしている。以上より求める共有点の x 座標は

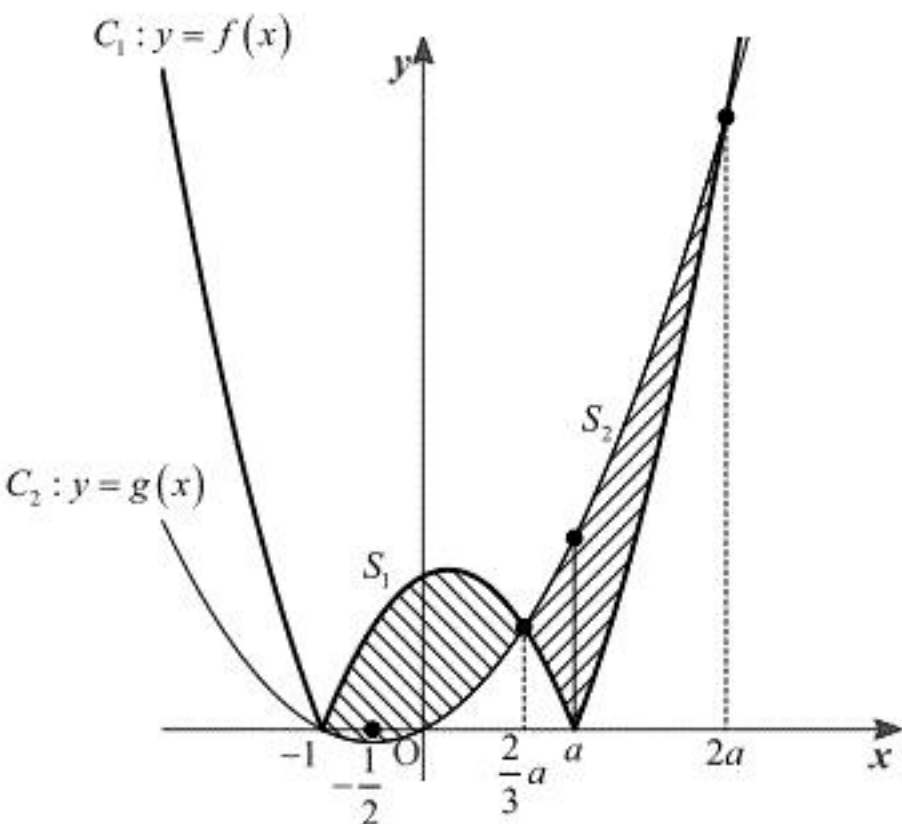
$$x=-1, \frac{2}{3}a, 2a$$

である。

$$(\text{答}) \quad -1, \frac{2}{3}a, 2a$$

(2)

曲線 C_1 と曲線 C_2 、および S_1, S_2 を xy 平面上に図示すると以下のようになる。



したがって、図より

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^{\frac{2}{3}a} \{-2(x+1)(x-a) - x(x+1)\} dx \\ &= \int_{-1}^{\frac{2}{3}a} \{-3x^2 + (2a-3)x + 2a\} dx \\ &= \left[-x^3 + \left(a - \frac{3}{2}\right)x^2 + 2ax \right]_{-1}^{\frac{2}{3}a} \\ &= \frac{4}{27}a^3 + \frac{2}{3}a^2 + a + \frac{1}{2} \\ S_2 &= \int_{\frac{2}{3}a}^a \{x(x+1) + 2(x+1)(x-a)\} dx + \int_a^{2a} \{x(x+1) - 2(x+1)(x-a)\} dx \\ &= \int_{\frac{2}{3}a}^a \{3x^2 - (2a-3)x - 2a\} dx + \int_a^{2a} \{-x^2 + (2a-1)x + 2a\} dx \\ &= \left[x^3 - \left(a - \frac{3}{2}\right)x^2 - 2ax \right]_{\frac{2}{3}a}^a + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 + 2ax \right]_a^{2a} \\ &= \frac{22}{27}a^3 + \frac{2}{3}a^2 \end{aligned}$$

であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \left(\frac{4}{27}a^3 + \frac{2}{3}a^2 + a + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{22}{27}a^3 + \frac{2}{3}a^2 \right) \\ &= -\frac{2}{3}a^3 + a + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -\frac{2}{3}a^3 + a + \frac{1}{2}$$

(3)

$$h(a) = -\frac{2}{3}a^3 + a + \frac{1}{2} \quad (a>0) \text{ とおくと}$$

$$h'(a) = -2a^2 + 1$$

より $h(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$h'(a)$		+	0	-
$h(a)$		↗	極大	↘

よって $S_1 - S_2$ が最大となる a の値は $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であり、そのときの $S_1 - S_2$ の値は

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2}, S_1 - S_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$$