

[1]

(1)	ア	$\frac{-3-\sqrt{11}}{2}$
	イ	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
	ウ	-6
	エ	2
(2)	オ	$\frac{5}{14}$
	カ	$\frac{3}{14}$
	キ	$\frac{1}{2}$

[1]

(1)

$-2x^2+4|x|-2x+1=0$ より,

・ $x \geq 0$ のとき

$$-2x^2+4x-2x+1=0$$

$$2x^2-2x-1=0$$

$$x=\boxed{\overset{(イ)}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}}$$

・ $x < 0$ のとき

$$-2x^2-4x-2x+1=0$$

$$2x^2+6x-1=0$$

$$x=\boxed{\overset{(ア)}{\frac{-3-\sqrt{11}}{2}}}$$

$-2x^2+4|x|-2x+1=mx+1$ とすると,

$$2x^2+(m+2)x-4|x|=0$$

この x の方程式が異なる 3 実解をもてばよい.

・ $x \geq 0$ のとき

$$x\{2x+(m-2)\}=0$$

$$x=0, \frac{-m+2}{2}$$

・ $x < 0$ のとき

$$x\{2x+(m+6)\}=0$$

$$x=\frac{-m-6}{2}$$

したがって, 求める m の範囲は, $\frac{-m+2}{2} > 0$ かつ $\frac{-m-6}{2} < 0$ より,

$$\boxed{\overset{(ウ)}{-6}} < m < \boxed{\overset{(エ)}{2}}$$

(2) A の起こる確率は,

$$\frac{{}_5C_1 \times {}_4C_2}{{}_9C_3} = \boxed{\overset{(オ)}{\frac{5}{14}}}$$

$A \cap B$ の起こる確率は,

$$\frac{5}{14} - \frac{{}_4C_1 \times {}_3C_2}{{}_9C_3} = \frac{5-2}{14} = \boxed{\overset{(カ)}{\frac{3}{14}}}$$

$A \cap C$ の起こる確率は,

$$\frac{{}_5C_1 \times {}_3C_1}{{}_9C_3} = \frac{5}{28}$$

であるから, A が起こったとき, C が起こる条件付き確率は,

$$\frac{\frac{5}{28}}{\frac{5}{14}} = \boxed{\overset{(キ)}{\frac{1}{2}}}$$

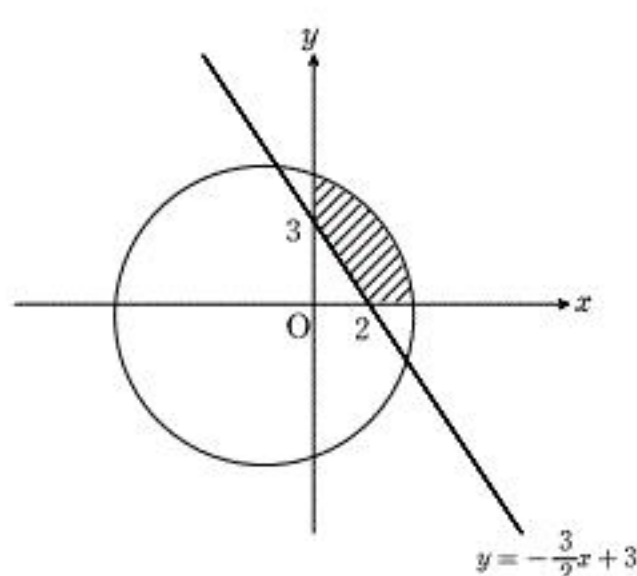
[2]

(1)	(i)	ア	$-3+6\sqrt{5}$
		イ	3
	(ii)	ウ	-16
		エ	$58-72\sqrt{2}$
(2)	(i)	オ	$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$
	(ii)	カ	2
	(iii)	キ	$\sqrt{2}$

[2]

(1)

$$D:\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ y\leq -\frac{3}{2}x+3 \\ (x+1)^2+(y+1)^2\leq 36 \end{cases}$$



- (i) $2x+y=k$ とおくと,
 $y=-2x+k$ ……①

これは傾き-2, y 切片 k の直線を表す.

・ k が最大となるのは, 直線①が円 $(x+1)^2+(y+1)^2=36$ の上半分と接するときで,
 このとき,

$$\begin{aligned} \frac{|2\cdot(-1)+(-1)-k|}{\sqrt{2^2+1^2}} &= 6 \\ |k+3| &= 6\sqrt{5} \\ k &= -3\pm 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

よって, k の最大値は,

$$k = \boxed{-3+6\sqrt{5}}^{(\text{ア})}$$

・ k が最小となるのは, 直線①が点 $(0, 3)$ を通るときであるから,
 k の最小値は,

$$k = 2\cdot 0 + 3 = \boxed{3}^{(\text{イ})}$$

- (ii) $x^2+y^2-10x-10y=m$ とおくと,
 $(x-5)^2+(y-5)^2=m+50$ ……②

これは中心 $(5, 5)$, 半径 $\sqrt{m+50}$ の円を表す.

・ m が最大となるのは, 円②が点 $(2, 0)$ を通るときで, このとき,

$$m = 2^2 + 0^2 - 10\cdot 2 - 10\cdot 0 = \boxed{-16}^{(\text{ウ})}$$

・ m が最小となるのは, 円②と円 $(x+1)^2+(y+1)^2=36$ が外接するときで,
 このとき,

$$\begin{aligned} 6 + \sqrt{m+50} &= \sqrt{\{5-(-1)\}^2 + \{5-(-1)\}^2} \\ \sqrt{m+50} &= 6(\sqrt{2}-1) \\ m+50 &= 36(\sqrt{2}-1)^2 \end{aligned}$$

よって, m の最小値は,

$$m = \boxed{58-72\sqrt{2}}^{(\text{エ})}$$

(2)

(i)

$$\overrightarrow{\text{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\text{AC}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\text{AD}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{とおくと, 条件より,}$$

$$\begin{cases} -2x+y=0 \\ -2x+3z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ -2x+5z>0 \end{cases}$$

これらを解くと, $x=\frac{3}{7}, y=\frac{6}{7}, z=\frac{2}{7}$ であるから,

$$\overrightarrow{n} = \boxed{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}}^{(\text{オ})}$$

- (ii) 実数 α, β を用いて,

$$\overrightarrow{\text{OP}} = \overrightarrow{\text{OA}} + \alpha \overrightarrow{\text{AB}} + \beta \overrightarrow{\text{AC}}$$

と表せる. よって,

$$\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t^2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{cases} t = -2\alpha - 2\beta + 2 \\ -t = \alpha \\ t^2 + 2 = 3\beta \end{cases}$$

よって, α, β を消去すると,

$$\begin{aligned} t &= 2t - \frac{2}{3}(t^2+2) + 2 \\ 2t^2 - 3t - 2 &= 0 \\ (2t+1)(t-2) &= 0 \end{aligned}$$

$t > 0$ より,

$$t = \boxed{2}^{(\text{カ})}$$

(iii)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{DP}}|^2 &= \left| \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t^2-3 \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= t^2 + t^2 + t^4 - 6t^2 + 9 \\ &= t^4 - 4t^2 + 9 \\ &= (t^2-2)^2 + 5 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\text{DP}}|$ が最小となるのは, $|\overrightarrow{\text{DP}}|^2$ が最小となるときだから, そのとき,

$$t^2 = 2$$

$t > 0$ より,

$$t = \boxed{\sqrt{2}}^{(\text{キ})}$$

[3]

$$(1) \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + a$$

$f(x)$ が $x = -1$ で極値 12 をとるための必要条件は

$$\begin{cases} f(-1) = 12 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} -3 - a + b = 12 \\ 7 + a = 0 \end{cases}$$

であるから、 $a = -7, b = 8$

このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - 7x + 8 \\ f'(x) &= 3x^2 - 4x - 7 \\ &= (x+1)(3x-7) \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	...	-1	...	$\frac{7}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

したがって、確かに $f(x)$ は $x = -1$ で極値をとるから、

求める a, b の値は、

$$a = -7, b = 8 \quad \text{.....(答)}$$

また、増減表と $f\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{176}{27}$ より、12 以外の極値は

$$-\frac{176}{27} \quad \text{.....(答)}$$

であり、その極値をとる x の値は

$$x = \frac{7}{3} \quad \text{.....(答)}$$

$$(2) \quad (1) \text{より、} f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 8$$

$f(x) = 0$ を解くと、

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 7x + 8 &= 0 \\ (x-1)(x^2 - x - 8) &= 0 \\ x &= 1, \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{1-\sqrt{33}}{2} < 1 < \frac{1+\sqrt{33}}{2}$ であるから、

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{33}}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{33}}{2} \quad \text{.....(答)}$$

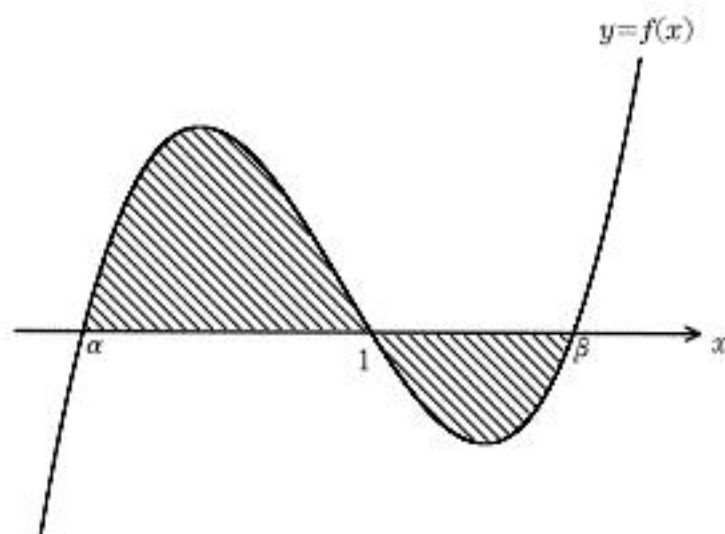
また、 α, β は $x^2 - x - 8 = 0$ の解だから、

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -8 \quad \text{.....①}$$

よって、

$$\begin{aligned} \alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 \\ &= \{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\}^2 - 2\alpha^2\beta^2 \\ &= (\alpha + \beta)^4 - 4(\alpha + \beta)^2 \cdot \alpha\beta + 2(\alpha\beta)^2 \\ &= 1^4 - 4 \cdot 1^2 \cdot (-8) + 2 \cdot (-8)^2 \\ &= 161 \quad \text{.....(答)} \end{aligned}$$

(3) (1), (2)より、図は次のようになる。



よって、求める部分の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^1 (x^3 - 2x^2 - 7x + 8) dx + \int_1^{\beta} \{-(x^3 - 2x^2 - 7x + 8)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 8x \right]_{\alpha}^1 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 8x \right]_1^{\beta} \\ &= 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{7}{2} + 8 \right) - \left(\frac{1}{4}\alpha^4 - \frac{2}{3}\alpha^3 - \frac{7}{2}\alpha^2 + 8\alpha \right) - \left(\frac{1}{4}\beta^4 - \frac{2}{3}\beta^3 - \frac{7}{2}\beta^2 + 8\beta \right) \\ &= \frac{49}{6} - \frac{1}{4}(\alpha^4 + \beta^4) + \frac{2}{3}(\alpha^3 + \beta^3) + \frac{7}{2}(\alpha^2 + \beta^2) - 8(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

ここで、①より、

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2 \cdot (-8) = 17 \\ \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 1 \cdot \{17 - (-8)\} = 25 \end{aligned}$$

これと(2)の結果から、

$$\begin{aligned} S &= \frac{49}{6} - \frac{1}{4} \cdot 161 + \frac{2}{3} \cdot 25 + \frac{7}{2} \cdot 17 - 8 \cdot 1 \\ &= \frac{433}{12} \quad \text{.....(答)} \end{aligned}$$