

[1]

(1)	ア	101
	イ	12
	ウ	4284
	エ	4
(2)	オ	2
	カ	$\frac{1}{16}$
	キ	$2\sqrt{2}$
(3)	ク	120°
	ケ	$\frac{5\sqrt{3}}{9}\pi$
	コ	3:13

[1]

(1) 2020 の約数を考える.

$$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot \boxed{101} \qquad \cdots \cdots \text{(答)}$$

2020 の正の約数の個数は,

$$(2+1)(1+1)(1+1) = \boxed{12} \text{ 個} \qquad \cdots \cdots \text{(答)}$$

約数の和は,

$$(2^0 + 2^1 + 2^2)(5^0 + 5^1)(101^0 + 101^1) = 7 \cdot 6 \cdot 102 \\ = \boxed{4284} \qquad \cdots \cdots \text{(答)}$$

また, 3 桁の約数は,

$$101, 101 \cdot 2, 101 \cdot 2^2, 101 \cdot 5 \cdots \cdots \boxed{4} \text{ 個} \qquad \cdots \cdots \text{(答)}$$

$$(2) \qquad \log_2(x+2) + \log_2(2x-3) = 2 \qquad \cdots \cdots \text{①}$$

真数条件より,

$$x+2 > 0 \text{ かつ } 2x-3 > 0$$

よって,

$$x > \frac{3}{2} \qquad \cdots \cdots \text{②}$$

①, ②より,

$$\log_2(x+2)(2x-3) = \log_2 2^2 \iff \log_2(2x^2+x-6) = \log_2 4 \\ \iff 2x^2+x-10 = 0 \\ \iff (2x+5)(x-2) = 0$$

②より,

$$x = \boxed{2} \qquad \cdots \cdots \text{(答)}$$

$$2(\log_2 x)^2 + 5\log_2 x - 12 = 0 \qquad \cdots \cdots \text{③}$$

真数条件より,

$$x > 0 \qquad \cdots \cdots \text{④}$$

③, ④より,

$$(2\log_2 x - 3)(\log_2 x + 4) = 0 \\ \log_2 x = \frac{3}{2}, -4 \\ x = \boxed{2\sqrt{2}}, \boxed{\frac{1}{16}} \qquad \cdots \cdots \text{(答)}$$

$$(3) \quad \triangle ABC \text{ について, 辺 } BC, AC, AB \text{ の長さをそれぞれ } a, b, c \text{ とおく.}$$

正弦定理より,

$$a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C \\ = 7:5:3$$

よって, 正の実数 k を用いて,

$$a = 7k, b = 5k, c = 3k$$

とおくと, 余弦定理より,

$$\cos A = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 5k} \\ = -\frac{1}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より,

$$A = \boxed{120^\circ} \left(= \frac{2}{3}\pi \right) \qquad \cdots \cdots \text{(答)}$$

次に, 辺 AC を直径とする円の面積を S とすると,

$$S = \left(\frac{5k}{2} \right)^2 \pi = \frac{25}{4} \pi k^2 \\ \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3k \cdot 5k \cdot \sin 120^\circ \\ = \frac{15\sqrt{3}}{4} k^2$$

よって,

$$\frac{S}{\triangle ABC} = \frac{\frac{25}{4} \pi k^2}{\frac{15\sqrt{3}}{4} k^2} = \frac{5\sqrt{3}\pi}{9}$$

$$\text{であるから, } S \text{ は } \triangle ABC \text{ の } \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{9}\pi} \text{ 倍} \qquad \cdots \cdots \text{(答)}$$

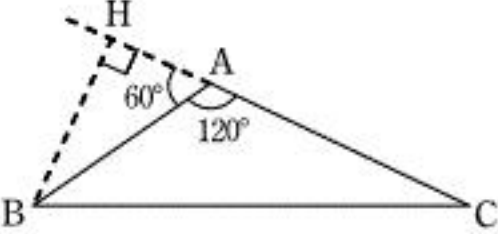
また, 三角形 ABH は $\angle HAB = 60^\circ, \angle AHB = 90^\circ$ の直角三角形であるから,

$$HA = \frac{1}{2} AB = \frac{3}{2} k$$

ゆえに,

$$AH:HC = \frac{3}{2} k : \left(\frac{3}{2} k + 5k \right) \\ = 3:13$$

$$\text{より, H は辺 AC を } \boxed{3:13} \text{ の比に外分する.} \qquad \cdots \cdots \text{(答)}$$



〔2〕

ア	$(1-\alpha, \sqrt{3}\alpha)$
イ	3
ウ	$\frac{1}{4}$
エ	$2t$
オ	$-2t+1$
カ	$2t^2-4t+1$
キ	$\sqrt{16t^2-12t+3}$
ク	60°
ケ	90°
コ	$\frac{1}{2}$

〔2〕

P の座標は,

$$((1-\alpha) \cdot 1 + \alpha \cdot 0, (1-\alpha) \cdot 0 + \alpha \cdot \sqrt{3}) = \boxed{(1-\alpha, \sqrt{3}\alpha)} \quad \text{……(答)}$$

Q の座標は,

$$((1-\alpha) \cdot 0 + \alpha \cdot (-1), (1-\alpha) \cdot \sqrt{3} + \alpha \cdot 0) = (-\alpha, \sqrt{3}(1-\alpha))$$

 $\beta = 1 - \alpha$ とおくと,

$$|\overrightarrow{OP}| = \left| \begin{pmatrix} \beta \\ \sqrt{3}\alpha \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\boxed{3}\alpha^2 + \beta^2}$$

であり, $t = \alpha\beta$ とおくと,

$$\begin{aligned} t &= \alpha(1-\alpha) \\ &= -\alpha^2 + \alpha \\ &= -\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

これと $0 < \alpha < 1$ より,

$$0 < t \leq \boxed{\frac{1}{4}} \quad \text{……(答)}$$

またこのとき, $P(\beta, \sqrt{3}\alpha), Q(-\alpha, \sqrt{3}\beta)$ より,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -\alpha\beta + 3\alpha\beta = \boxed{2t} \quad \text{……(答)}$$

 $\alpha\beta = t, \alpha + \beta = \alpha + (1-\alpha) = 1$ より,

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= \boxed{1-2t} \quad \text{……(答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 \\ &= (1-2t)^2 - 2t^2 \\ &= \boxed{2t^2-4t+1} \quad \text{……(答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| &= \sqrt{3\alpha^2 + \beta^2} \sqrt{\alpha^2 + 3\beta^2} \\ &= \sqrt{3(\alpha^4 + \beta^4) + 10\alpha^2\beta^2} \\ &= \sqrt{3(2t^2 - 4t + 1) + 10t^2} \\ &= \boxed{\sqrt{16t^2 - 12t + 3}} \quad \text{……(答)} \end{aligned}$$

 $\theta = \angle POQ$ とおくと,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|} \\ &= \frac{2t}{\sqrt{16t^2 - 12t + 3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{16 - \frac{12}{t} + \frac{3}{t^2}}} \quad (t > 0 \text{ より}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3\left(\frac{1}{t} - 2\right)^2 + 4}} \end{aligned}$$

 $0 < t \leq \frac{1}{4}$ より $\frac{1}{t} \geq 4$ であるから, $\cos \theta$ のとりうる値の範囲は,

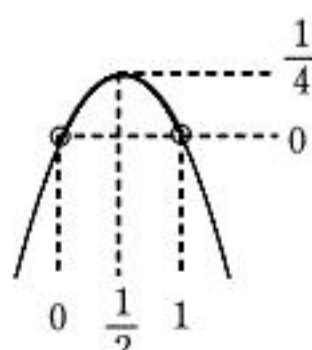
$$0 < \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

よって, $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$ より,

$$\boxed{60^\circ} \leq \theta < \boxed{90^\circ} \quad \text{……(答)}$$

また, $t = \frac{1}{4}$ のとき $-\alpha^2 + \alpha = \frac{1}{4}$ ($0 < \alpha < 1$) より,

$$\alpha = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \text{……(答)}$$



〔3〕

ア	3^n
イ	$\frac{3}{2}(3^n-1)$
ウ	$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
エ	$\frac{35}{36}$
オ	$\frac{1}{6}(2n+1)(2n+3)$
カ	$\frac{2n+3}{3^n n(n+1)}$
キ	2
ク	$\frac{13}{12}$
ケ	$\frac{1}{3^{n-1}n}$
コ	$\frac{41}{36}$

〔3〕

$$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = \boxed{3^n} \quad \text{……(答)}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{3(3^n-1)}{3-1} = \boxed{\frac{3}{2}(3^n-1)} \quad \text{……(答)}$$

$$b_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \boxed{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} \quad \text{……(答)}$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k c_k = \frac{1}{36}(2n+1)(2n+3)(2n+5) \quad \text{……(*)}$$

(*)で $n=1$ とすると、 $a_1=3, b_1=1$ より、

$$3 \cdot 1 \cdot c_1 = \frac{1}{36} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$c_1 = \boxed{\frac{35}{36}} \quad \text{……(答)}$$

$n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} T_n - T_{n-1} &= \frac{1}{36}(2n+1)(2n+3)(2n+5) - \frac{1}{36}(2n-1)(2n+1)(2n+3) \\ &= \frac{1}{36}(2n+1)(2n+3) \cdot 6 \\ &= \boxed{\frac{1}{6}(2n+1)(2n+3)} \quad \text{……(答)} \end{aligned}$$

$$a_n b_n c_n = T_n - T_{n-1}$$

より、

$$3^n \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \cdot c_n = \frac{1}{6}(2n+1)(2n+3)$$

$$c_n = \boxed{\frac{2n+3}{3^n \cdot n(n+1)}} \quad \text{……(答)}$$

以上より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n 3^n c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \boxed{2} \quad \text{……(答)} \\ \sum_{n=1}^N \frac{3^n c_n}{2n+3} &= \frac{3 \cdot c_1}{2 \cdot 1 + 3} + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{7}{12} + \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{7}{12} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \right) - \left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right) \\ &= \frac{7}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \boxed{\frac{13}{12}} \quad \text{……(答)} \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} c_n + \frac{1}{3^n(n+1)} &= \frac{(2n+3)+n}{3^n n(n+1)} \\ &= \boxed{\frac{1}{3^{n-1}n}} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N c_n &= c_1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{3^{n-1}n} - \frac{1}{3^n(n+1)} \right) \\ &= \frac{35}{36} + \left(\frac{1}{3^1 \cdot 2} + \frac{1}{3^2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{3^{N-1} \cdot N} \right) - \left(\frac{1}{3^2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{3^{N-1} \cdot N} + \frac{1}{3^N(N+1)} \right) \\ &= \frac{35}{36} + \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{3^N(N+1)} \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \boxed{\frac{41}{36}} \quad \text{……(答)} \end{aligned}$$

[4]

(1)

$$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$g'(x) = -\frac{b}{2\sqrt{c-x}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 条件より,

$$\begin{cases} f(1) = g(1) & \dots\dots\textcircled{1} \\ f'(1) \cdot g'(1) = -1 & \dots\dots\textcircled{2} \end{cases}$$

①より,

$$a = b\sqrt{c-1} \quad \dots\dots\textcircled{1}'$$

よって, ②より,

$$\frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{b}{2\sqrt{c-1}} \right) = -1$$

$$\frac{b\sqrt{c-1}}{2} \cdot \frac{b}{2\sqrt{c-1}} = 1$$

$b > 0$ より,

$$b = 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

ゆえに, ①' より,

$$a = 2\sqrt{c-1} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) D の面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^1 a\sqrt{x} \, dx + \int_1^c 2\sqrt{c-x} \, dx \\ &= a \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^1 + 2 \left[-\frac{2}{3} (c-x)\sqrt{c-x} \right]_1^c \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{c-1} + \frac{4}{3} (c-1)\sqrt{c-1} \\ &= \frac{4}{3} c\sqrt{c-1} \end{aligned}$$

と表せるから,

$$\frac{4}{3} c\sqrt{c-1} = \frac{40}{3}$$

$$c\sqrt{c-1} = 10$$

$$c^2(c-1) = 100$$

$$c^3 - c^2 - 100 = 0$$

$$(c-5)(c^2 + 4c + 20) = 0$$

$c^2 + 4c + 20 = (c+2)^2 + 16 > 0$ より,

$$c = 5 \quad \dots\dots(\text{答})$$

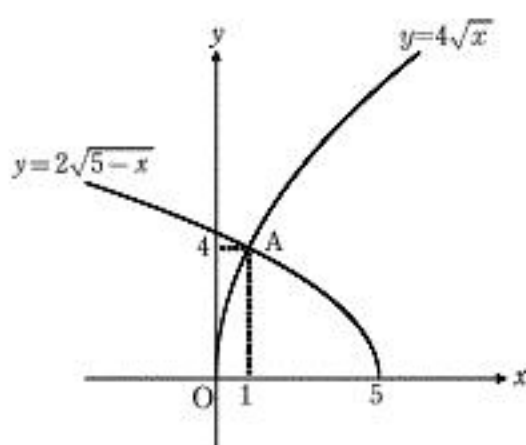
ゆえに,

$$a = 2\sqrt{5-1} = 4 \quad \dots\dots(\text{答})$$

またこのとき, $f(1) = 4\sqrt{1} = 4$ より,

$$A(1, 4) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(4) (3)より, 図は次のようになる.



$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^1 (4\sqrt{x})^2 \, dx + \pi \int_1^5 (2\sqrt{5-x})^2 \, dx \\ &= 16\pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 + 4\pi \left[-\frac{1}{2} (5-x)^2 \right]_1^5 \\ &= 8\pi + 32\pi \\ &= 40\pi \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$y = 2\sqrt{5-x}$ より,

$$y^2 = 4(5-x)$$

$$x = -\frac{1}{4}y^2 + 5$$

$y = 4\sqrt{x}$ より,

$$y^2 = 16x, \quad x = \frac{1}{16}y^2$$

であることから,

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}y^2 + 5 \right)^2 \, dy - \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{16}y^2 \right)^2 \, dy \\ &= \pi \int_0^4 \left(\frac{15}{16}y^4 - \frac{5}{2}y^2 + 25 \right) \, dy \\ &= \pi \left[\frac{3}{16}y^5 - \frac{5}{6}y^3 + 25y \right]_0^4 \\ &= \frac{176}{3}\pi \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$