

【1】

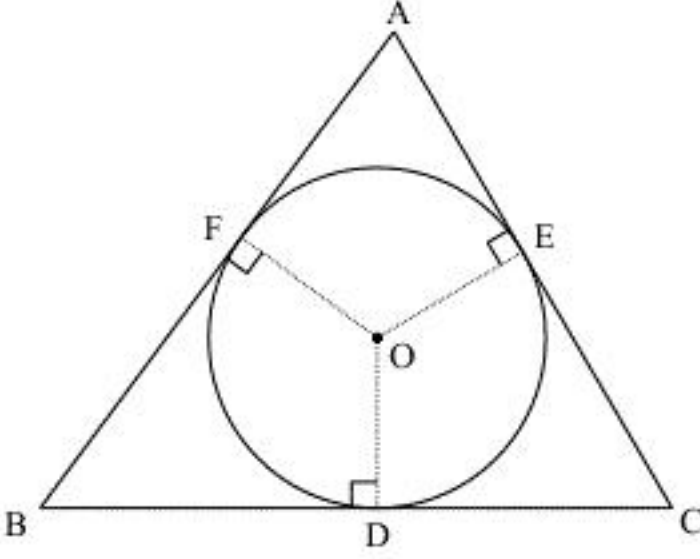
【解答】

	ア	イ	ウ	エ
(1)	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{7}{4}$
(2)	オ	カ	キ	
	$\frac{13}{256}$	$\frac{129}{256}$	$\frac{3}{32}$	

【解説】

(1)

円 K と辺 AB の接点を F とすると、 $\triangle ABC$ および点 D, E, F は下図のようになる。



円 K は $\triangle ABC$ の内接円であるから、 $\angle ODB = \angle OEC = \angle OFA = 90^\circ$ となり、

$$\begin{aligned} OB &= \sqrt{OD^2 + BD^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \sin \angle OBD &= \frac{OD}{OB} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

である。ここで、 $OD = OF (= 1)$ 、 $\angle ODB = \angle OFB (= 90^\circ)$ 、 $OB = OB$ (共通) であるから、 $\triangle OBD \equiv \triangle OBF$ となる。また、同様に $\triangle OAE \equiv \triangle OAF$ 、 $\triangle OCE \equiv \triangle OCD$ である。 $\triangle OBD \equiv \triangle OBF$ より、 $\angle ABC = 2\angle OBD$ であるから、

$$\begin{aligned} \cos \angle ABC &= \cos 2\angle OBD \\ &= 1 - 2\sin^2 \angle OBD \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

となる。 $AE = \frac{3}{2}$ のとき、 $\triangle OBD \equiv \triangle OBF$ より $BD = BF$ 、 $\triangle OAE \equiv \triangle OAF$ より $AE = AF$ であ

るから、 $AB = AF + BF = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$ であり、また、 $0^\circ < \sin \angle ABC < 180^\circ$ より $\sin \angle ABC > 0$ であ

るから、

$$\begin{aligned} AH &= AB \cdot \sin \angle ABC \\ &= \frac{7}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{14}{5} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\triangle OCE \equiv \triangle OCD$ より、 $CD = CE$ となる。 $CD = CE = x$ とおくと、円 K は $\triangle ABC$ の内接円であるから、

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= (AB + BC + CA) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{2} + x \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 + x) \cdot \frac{14}{5} \\ &= \frac{14}{5} + \frac{7}{5}x \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \frac{7}{2} + x &= \frac{14}{5} + \frac{7}{5}x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

である。

(2)

$(X, Y, Z) = (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)$ となる確率はそれぞれ、

$$\left(\frac{2}{8}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

である。また、 $(X, Y, Z) = (4, 4, 4), (5, 5, 5)$ となる確率はそれぞれ、

$$\left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}$$

となるから、 X, Y, Z がすべて一致している確率は、

$$\frac{1}{64} \cdot 3 + \frac{1}{512} \cdot 2 = \frac{13}{256}$$

である。次に、 X, Y, Z のうち2つが一致し、残りの1つが異なっている確率を考える。2回取り出す数を A 、1回取り出す数を B として、場合分けをする。

[1] A および B が2個ある玉の数であるとき

このとき、 $(A, B) = (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)$ であり、生じる確率はそれぞれ

$$\left(\frac{2}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{8}\right) \cdot {}_3C_1 = \frac{3}{64} \text{ である。}$$

[2] A が2個ある玉の数であり、 B が1個ある玉の数であるとき

このとき、 $(A, B) = (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$ であり、生じる確率はそれぞれ

$$\left(\frac{2}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot {}_3C_1 = \frac{3}{128} \text{ である。}$$

[3] A が1個ある玉の数であり、 B が2個ある玉の数であるとき

このとき、 $(A, B) = (4, 1), (5, 1), (4, 2), (5, 2), (4, 3), (5, 3)$ であり、生じる確率はそれぞれ

$$\left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{8}\right) \cdot {}_3C_1 = \frac{3}{256} \text{ である。}$$

[4] A および B が1個ある玉の数であるとき

このとき、 $(A, B) = (4, 5), (5, 4)$ であり、生じる確率はそれぞれ $\left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot {}_3C_1 = \frac{3}{512}$ である。

以上[1], [2], [3], [4]より、 X, Y, Z のうち2つが一致し、残りの1つが異なっている確率は、

$$\frac{3}{64} \cdot 6 + \frac{3}{128} \cdot 6 + \frac{3}{256} \cdot 6 + \frac{3}{512} \cdot 2 = \frac{129}{256}$$

である。次に、 X, Y, Z がすべて異なっていて、 X, Y, Z を3辺の長さとする三角形が存在する確率を考える。このとき、 X, Y, Z の中で最大の数が、他の2つの数の和より小さいから、 (X, Y, Z) は

$$(2, 3, 4), (2, 4, 5), (3, 4, 5)$$

または、これらの X, Y, Z の順番を並べ替えたものとなる。よって、求める確率は

$$\left(\frac{2}{8}\right) \cdot \left(\frac{2}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 3! + 2 \cdot \left(\frac{2}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 3! = \frac{3}{32}$$

である。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	-1	-2	$4-\sqrt{7}i$	
(2)	エ	オ	カ	キ
	$\frac{1}{2}$	26	4	$\frac{255}{32}$

〔解説〕

(1)

整式 $P(x)=x^4+ax^2+bx+17$ を x^2+3x+4 で割ると、

$$P(x)=\left(x^2+3x+4\right)\left(x^2-3x+a+5\right)+\left(-3a+b-3\right)x-4a-3 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

となる。この余りである $\left(-3a+b-3\right)x-4a-3$ が $-2x+1$ に等しいから、各係数を比較して、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -3a+b-3=-2 \\ -4a-3=1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a=-1, b=-2 \end{aligned}$$

となる。また、この a, b を $\textcircled{1}$ に代入して、

$$P(x)=\left(x^2+3x+4\right)\left(x^2-3x+4\right)-2x+1$$

となる。ここで、 $\alpha=\frac{-3+\sqrt{7}i}{2}$ とおくと、 α は 2 次方程式 $x^2+3x+4=0$ の解の 1 つである。よって、

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= 0-2\alpha+1 \left(\because \alpha^2+3\alpha+4=0 \right) \\ &= 4-\sqrt{7}i \end{aligned}$$

となる。

(2)

まず、数列 $\{a_n\}$ は初項 a 、公差 d の等差数列、数列 $\{b_n\}$ は初項 a 、公比 r の等比数列であるから、その一般項はそれぞれ、

$$\begin{aligned} a_n &= a+(n-1)d \\ b_n &= ar^{n-1} \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、 $a_{13}=0$ より

$$a+12d=0 \Leftrightarrow d=-\frac{a}{12}$$

である。これを一般項 a_n に代入して、

$$\begin{aligned} a_n &= a+(n-1)\cdot\left(-\frac{a}{12}\right) \\ &= \frac{a}{12}(13-n) \end{aligned}$$

となる。さらに、 $b_3=a_{10}$ より

$$\begin{aligned} ar^2 &= \frac{a}{12}\cdot 3 \\ \Leftrightarrow a(2r+1)(2r-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{1}{2} \left(\because a>0, r>0 \right) \end{aligned}$$

である。また、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{a}{12} \sum_{k=1}^n (13-k) \\ &= \frac{a}{12} \cdot \left\{ 13n - \frac{1}{2}n(n+1) \right\} \\ &= \frac{a}{24}n(25-n) \end{aligned}$$

となり、 $S_n<0$ とすると、

$$\begin{aligned} S_n &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{24}n(25-n) &< 0 \\ \Leftrightarrow n &> 25 \left(\because a>0, n>0 \right) \end{aligned}$$

となる。よって $S_n<0$ となるような n のうち最小のものは 26 である。さらに、 $S_{10}=25$ のとき、

$$\frac{a}{24}\cdot 10\cdot 15=25 \Leftrightarrow a=4$$

であり、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 b_k &= \sum_{k=1}^8 \left\{ 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\} \\ &= 4\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{255}{32} \end{aligned}$$

である。

【3】

(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3(a^2 - 1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

より、曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線の傾きは、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2 + 6at + 3(a^2 - 1) \\ &= 3(t+a)^2 - 3 \end{aligned}$$

であり、 t は実数全体を動くから、 $f'(t)$ は $t = -a$ のとき最小値 -3 をとる。よって、接線 ℓ は曲線 C 上の点 $(-a, f(-a))$ を通る傾き -3 の直線であるから、その方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -3(x+a) + f(-a) \\ \Leftrightarrow y &= -3x - a^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -3x - a^3$$

(2)

式①を因数分解すると、

$$f'(x) = 3(x+a-1)(x+a+1)$$

となるから、 $f(x)$ の増減表をかくと以下の通りになる。

x	$\cdots$	$-a-1$	$\cdots$	$-a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

したがって、 $f(x)$ の極大値が 0 であるとき、

$$\begin{aligned} f(-a-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -a^3 + 3a + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -(a+1)^2(a-2) &= 0 \\ \therefore a &= 2 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

を得る。よって、 $f(x)$ の極小値は $x = -a+1 = -1$ のとき、

$$\begin{aligned} f(-a+1) &= -a^3 + 3a - 2 \\ &= f(-a-1) - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

となる。

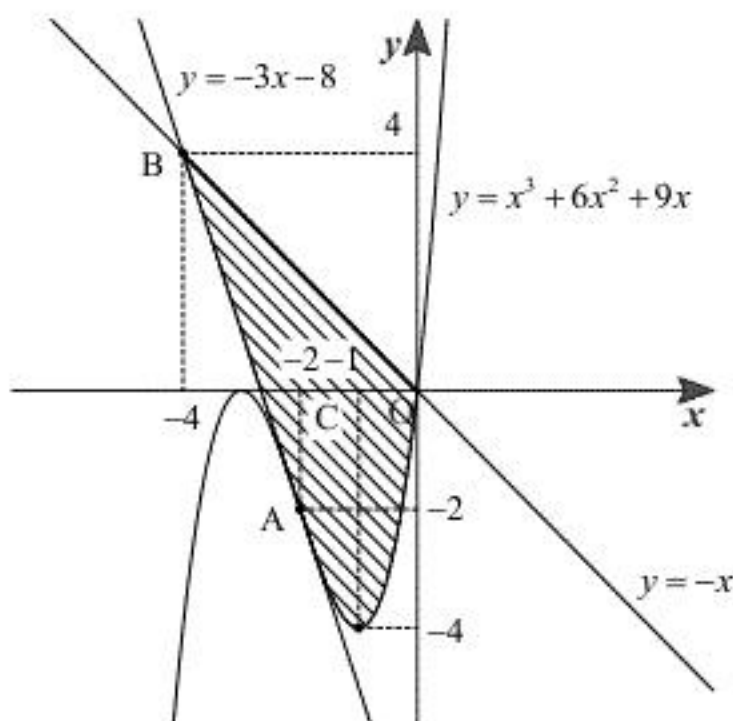
$$(\text{答}) \quad a = 2, \text{ 極小値: } -4$$

(3)

$a = 2$ のとき、 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ であり、接線 ℓ の方程式は(1)より $y = -3x - 8$ となる。よって、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = -x \\ y = -3x - 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (-4, 4) \\ &\begin{cases} y = -x \\ y = x^3 + 6x^2 + 9x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x(x^2 + 6x + 10) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \quad (\because x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1 > 0) \\ &\begin{cases} y = -3x - 8 \\ y = x^3 + 6x^2 + 9x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 8 \\ (x+2)^3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (-2, -2) \end{aligned}$$

より、求める面積は、以下の図の斜線部で囲まれた領域の面積である。ここで、図中の $(-2, -2)$, $(-4, 4)$, $(-2, 0)$ をそれぞれ点 A, B, C とおいた。



したがって、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-2}^0 f(x) dx + \triangle ABC + \triangle OBC \\ &= -\left[\frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_{-2}^0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \\ &= (4 - 16 + 18) + 2 + 4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad 12$$