

2020—(C(理系))

■ 数 学 問 題

15:00～16:30 (90分)

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、問題を見てはいけません。
2. 数学の試験用紙は、問題用紙1部(8ページ)、記述式解答用紙(あ)1枚、記述式解答用紙(い)1枚、記述式解答用紙(う)1枚、記述式解答用紙(え)1枚から構成されています。過不足があれば監督者に申し出てください。
なお、記述式解答用紙はセットになっています。監督者の指示に従って、解答用紙を破ったりしないよう注意して、ミシン目に沿って1枚ずつ切り離してください。
3. 試験中に試験用紙の印刷の不鮮明、ページの欠落、乱れおよび解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、監督者に申し出てください。
4. 監督者の指示に従って、記述式解答用紙(4枚)の受験番号の記入欄に受験番号をそれぞれ2カ所(計8カ所)記入してください。
5. 解答はすべてHBの黒鉛筆またはHBで0.5mm以上の芯のシャープペンシルで記入してください。
6. 解答用紙は丁寧に取扱いってください。
7. 解答は、解答用紙の問題番号を十分に確認のうえ、解答用紙の各問指定の枠内に記入してください。解答用紙の裏面にはいっさい記入してはいけません。下書きなどには問題用紙の余白を利用してください。
8. 解答中以外の解答用紙は必ず裏返しに置いてください。
9. 受験中は不審な行動をとってはいけません。不正行為があれば当該年度の全入学試験を無効とします。
10. 試験時間の途中で退場することはできません。
ただし、気分が悪いなど身体の調子が悪くなった場合は、手を挙げて監督者に申し出てください。
11. 試験終了の合図と同時に解答をやめてください。
12. 問題用紙は試験終了後、持ち帰ってください。

各問題の解答は、解答用紙の同じ問題番号のついた枠内に記入すること。

枠外および問題番号と異なる番号のところに書かれた解答は、採点の対象にはならない。

[1]

(1), (2), (3) の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

また、(4) の文章中の に「必要十分条件である」が当てはまる場合は 1 を、「必要条件であるが、十分条件でない」が当てはまる場合は 2 を、「十分条件であるが、必要条件でない」が当てはまる場合は 3 を、「必要条件でも十分条件でもない」が当てはまる場合は 4 を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。

(1) $A = (2^{\frac{4}{3}} \times 2^{-1})^6 \times \left\{ \left(\frac{16}{81} \right)^{-\frac{5}{6}} \right\}^{\frac{3}{5}}$ と $B = (\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{2} - \sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9})$ を計算すると、 $A = \text{ア}$, $B = \text{イ}$ となる。

(2) $x > 1$, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{6}$ とすると、 $x = \text{ウ}$, $\frac{1}{x^2} = \text{エ}$ である。

(3) $Q(x) = x^2 - 2x + \text{オ}$ とおくと $Q(1 - 2i) = 0$ が成り立つ。

このとき、 $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 7x + 6$ を $Q(x)$ で割った余りは カ なので、 $P(1 - 2i) = \text{キ}$ である。また、 $P(1 - 2i)$ と $P(1 + 2i)$ の積は ク である。

(4) 実数 r について、 $3r$ が無理数であることは r が無理数であるための ケ 。

xy 平面上の点について、 x 座標と y 座標がともに整数であることは、原点からの距離が整数であるための コ 。

[2]

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

座標平面上の 4 点 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$ を頂点とする正方形を考える。点 P は 1 秒ごとに、この正方形のある頂点から隣の頂点に移動する。ただし、 x 軸と平行な方向に移動する確率は p ($0 < p < 1$)、 y 軸と平行な方向に移動する確率は $1-p$ である。点 P が最初に頂点 A にいるとき、 n 秒後 ($n \geq 1$) に頂点 A , C にいる確率をそれぞれ a_n , c_n とする。

(1) $a_1 =$ ア である。

(2) $a_2 =$ イ , $c_2 =$ ウ である。

(3) a_{n+2} を p, a_n, c_n で表すと エ であり、 c_{n+2} を p, a_n, c_n で表すと オ である。

(4) $a_{2m} + c_{2m}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) と $a_{2m} - c_{2m}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) はそれぞれ公比 カ , キ の等比数列である。

(5) n が 2 以上の偶数のとき $a_n =$ ク , $c_n =$ ケ である。また、 $\sum_{n=1}^{2m} a_n =$ コ である。

〔3〕

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

関数 $f(x) = e^{-x} \sin x$, $g(x) = e^{-x} \cos x$ とおく。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) 曲線 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) と x 軸との共有点を x 座標の小さな順に並べ、それらを $P_0, P_1, P_2, \dots$ とする。点 P_0 は原点である。点 P_n の x 座標は ア である。

(2) 関数 $f(x)$ を微分すると $f'(x) =$ イ である。

また、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ の範囲において $f(x)$ は $x =$ ウ で極値をとり、 $f(\text{ウ}) = (-1)^{n-1}$ エ である。

(3) 点 Q_n を $(\text{ウ}, (-1)^{n-1} \text{エ})$ とする。三角形 $P_{n-1}P_nQ_n$ の面積を S_n とすると、 $S_n =$ オ ,
 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n =$ カ である。

(4) $\{f(x) + g(x)\}' =$ キ $f(x)$ であるから $\int f(x) dx =$ ク $\{f(x) + g(x)\} + C$ となる。ただし、 C は積分定数である。

(5) 曲線 $y = f(x)$ と線分 P_0Q_1 で囲まれる領域 D の面積は ケ である。また、 D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は コ である。

[4] xy 平面において, 放物線 $C: y = \frac{x^2}{2}$ 上の 2 点 $A\left(\alpha, \frac{\alpha^2}{2}\right)$, $B\left(\beta, \frac{\beta^2}{2}\right)$ ($\alpha < \beta$) を結ぶ線分の midpoint の座標を (p, q) とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}$ のとき, (p, q) および線分 AB の長さを求めよ.
- (2) $p = -1, q = \frac{5}{2}$ のとき, $\alpha\beta$ および線分 AB の長さを求めよ.
- (3) p, q が (2) の値と限らない一般の場合に, $\alpha\beta$ および線分 AB の長さを p, q で表せ.
- (4) $AB = \frac{5}{2}$ のとき, q を p で表せ. また, $AB = \frac{5}{2}$ を満たしながら点 A, B が C 上を動くとき, q の最小値とそのときの p の値を求めよ.

——— このページは白紙です。 ———

—— このページは白紙です。 ——

——— このページは白紙です。 ———