

2020—(A(理系))

■ 数 学 問 題

15:00～16:30 (90分)

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、問題を見てはいけません。
2. 数学の試験用紙は、問題用紙1部(8ページ)、記述式解答用紙(あ)1枚、記述式解答用紙(い)1枚、記述式解答用紙(う)1枚、記述式解答用紙(え)1枚から構成されています。過不足があれば監督者に申し出てください。
なお、記述式解答用紙はセットになっています。監督者の指示に従って、解答用紙を破ったりしないよう注意して、ミシン目に沿って1枚ずつ切り離してください。
3. 試験中に試験用紙の印刷の不鮮明、ページの欠落、乱れおよび解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、監督者に申し出てください。
4. 監督者の指示に従って、記述式解答用紙(4枚)の受験番号の記入欄に受験番号をそれぞれ**2カ所(計8カ所)**記入してください。
5. 解答はすべて**HBの黒鉛筆**または**HBで0.5mm以上の芯のシャープペンシル**で記入してください。
6. 解答用紙は丁寧に取扱いってください。
7. 解答は、解答用紙の問題番号を十分に確認のうえ、解答用紙の各問指定の枠内に記入してください。解答用紙の裏面にはいっさい記入してはいけません。下書きなどには問題用紙の余白を利用してください。
8. 解答中以外の解答用紙は必ず裏返しに置いてください。
9. 受験中は不審な行動をとってはいけません。不正行為があれば当該年度の全入学試験を無効とします。
10. 試験時間の途中で退場することはできません。
ただし、気分が悪いなど身体の調子が悪くなった場合は、手を挙げて監督者に申し出てください。
11. 試験終了の合図と同時に解答をやめてください。
12. 問題用紙は試験終了後、持ち帰ってください。

各問題の解答は、解答用紙の同じ問題番号のついた枠内に記入すること。

枠外および問題番号と異なる番号のところに書かれた解答は、採点の対象にはならない。

[1]

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

- (1) 2020 の約数のうち、3桁の素数は1個だけで、それは ア である。2020 の約数は イ 個あり、それらの和は ウ である。また、3桁の約数は エ 個ある。
- (2) $\log_2(x+2) + \log_2(2x-3) = 2$ の解は $x =$ オ である。また、 $2(\log_2 x)^2 + 5\log_2 x - 12 = 0$ は有理数の解 $x =$ カ と無理数の解 $x =$ キ をもつ。
- (3) $\triangle ABC$ の3つの角 A, B, C について $\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$ とする。このとき $A =$ ク であり、辺 AC を直径とする円の面積は $\triangle ABC$ の面積の ケ 倍である。また、点 B から直線 AC に垂線 BH を下ろすと、 H は辺 AC を コ の比に外分する。

[2]

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

xy 平面において $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,\sqrt{3})$, $C(-1,0)$ とする. $0 < \alpha < 1$ とする. 線分 AB を $\alpha:1-\alpha$ に内分する点を P , 線分 BC を $\alpha:1-\alpha$ に内分する点を Q とする. このとき, P の座標は ア である.

$\beta = 1 - \alpha$ とおくと $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{\text{イ} \alpha^2 + \beta^2}$ であり, $t = \alpha\beta$ とおくと t のとりうる値の範囲は $0 < t \leq$ ウ である.

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ を t で表すと $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} =$ エ である. また, $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^4 + \beta^4$ と $|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|$ を t で表すと, $\alpha^2 + \beta^2 =$ オ , $\alpha^4 + \beta^4 =$ カ , $|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| =$ キ である.

$\theta = \angle POQ$ とおくと, θ のとりうる値の範囲は ク $\leq \theta <$ ケ であり, $\theta =$ ク となるのは $\alpha =$ コ のときである.

[3]

次の文章中の $\square$ に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた $\square$ の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

数列 $\{a_n\}$ は初項 3、公比 3 の等比数列とすると、その一般項は $a_n = \square{\text{ア}}$ であり、 $\sum_{k=1}^n a_k = \square{\text{イ}}$ で

ある。数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \sum_{k=1}^n k^2$ で定義すると、その一般項は $b_n = \square{\text{ウ}}$ である。

数列 $\{c_n\}$ について

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k c_k = \frac{1}{36}(2n+1)(2n+3)(2n+5) \quad \cdots \cdots (*)$$

が成り立つとする。このとき $c_1 = \square{\text{エ}}$ である。 $T_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k c_k$ とおく。(*) より、 $n \geq 2$ のとき

$T_n - T_{n-1}$ を n の式で表すと $T_n - T_{n-1} = \square{\text{オ}}$ である。ゆえに $n \geq 2$ のとき $c_n = \square{\text{カ}}$ である。以上より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n 3^n c_n = \square{\text{キ}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n c_n}{2n+3} = \square{\text{ク}}$$

である。また、 $c_n + \frac{1}{3^n(n+1)} = \square{\text{ケ}}$ ($n \geq 2$) であるから $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \square{\text{コ}}$ である。

[4]

a, b, c は定数で, $a > 0, b > 0, c > 1$ とする. 2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = a\sqrt{x}, \quad g(x) = b\sqrt{c-x}$$

とし, 2つの曲線 C_1 と C_2 を $C_1: y = f(x), C_2: y = g(x)$ とする. また, 曲線 C_1 と 曲線 C_2 は点 A において交わり, かつ点 A における C_1 の接線と C_2 の接線が垂直であるとする. ただし, 点 A の x 座標は 1 とする. さらに, 曲線 C_1 と 曲線 C_2 および x 軸で囲まれた部分を D とする.

次の問いに答えよ.

- (1) 2つの関数 $f(x)$ および $g(x)$ の導関数を求めよ.
- (2) b の値を求めよ. また, a を c で表せ.
- (3) D の面積が $\frac{40}{3}$ であるとする. このとき, a と c の値, および交点 A の座標を求めよ.
- (4) a と c が (3) の値をとるとき, D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V_x と y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V_y を求めよ.

——— このページは白紙です。 ———

—— このページは白紙です。 ——

——— このページは白紙です。 ———