

【1】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ
	8	$-2p^2 - p + 9$	$-2p^2 + 9$	$\frac{73}{8}$
(2)	オ	カ	キ	
	$\frac{625}{3888}$	$\frac{21-k}{5k}$	3	

【解説】

(1)

$f(x) = -px^2 + 2px - 2p^2 - p + 9$ とする。 $p = -1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 8 \\ &= (x-1)^2 + 7 \end{aligned}$$

であるから、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値は

$$\begin{aligned} M &= f(0) \\ &= 8 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(x)$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} f(x) &= -px^2 + 2px - 2p^2 - p + 9 \\ &= -p(x-1)^2 - 2p^2 + 9 \end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $p < 0$ のとき、グラフ $y = f(x)$ は $x = 1$ を軸にもつ下に凸の放物線となる。

したがって、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値は

$$\begin{aligned} M &= f(0) \\ &= -2p^2 - p + 9 \end{aligned}$$

となる。また、 $p = 0$ のとき、 x の値にかかわらず $f(x) = 9$ となるから、

$$M = 9$$

である。さらに、 $p > 0$ のとき、グラフ $y = f(x)$ は $x = 1$ を軸にもつ上に凸の放物線となる。

したがって、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値は

$$\begin{aligned} M &= f(1) \\ &= -2p^2 + 9 \end{aligned}$$

となる。これに $p = 0$ を代入すると $M = 9$ となるから、 $p \geq 0$ について

$$M = -2p^2 + 9$$

といえる。ここで

$$-2p^2 - p + 9 = -2\left(p + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{73}{8}$$

であるから、 $p < 0$ における M の範囲は $M \leq \frac{73}{8}$ である。また、 $p \geq 0$ において $-2p^2 + 9$ は減

少関数だから、 M の範囲は $M \leq 9$ である。以上から、求める M の範囲は $M \leq \frac{73}{8}$ である。

(2)

2つのさいころの目の組み合わせは $6^2 = 36$ 通りである。また、2つのサイコロを同時に1回

投げて、出た目の和が7になるのは、2つのサイコロの出た目の組み合わせが

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ のときであるから、その確率は

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

である。したがって、このゲームを5回おこなうとき2回勝つ確率は

$$\begin{aligned} {}_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 &= \frac{10 \cdot 125}{6^5} \\ &= \frac{625}{3888} \end{aligned}$$

である。また、 k は整数であり

$$\begin{aligned} p_k &= {}_{20}C_k \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{20-k} \\ &= \frac{{}_{20}C_k \cdot 5^{20-k}}{6^{20}} \quad (0 \leq k \leq 20) \end{aligned}$$

であるから、 $1 \leq k \leq 20$ において

$$\begin{aligned} \frac{p_k}{p_{k-1}} &= \frac{{}_{20}C_k \cdot 5^{20-k}}{6^{20}} \cdot \frac{6^{20}}{{}_{20}C_{k-1} \cdot 5^{21-k}} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{20!}{k!(20-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(21-k)!}{20!} \\ &= \frac{21-k}{5k} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\frac{p_k}{p_{k-1}} > 1$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{21-k}{5k} &> 1 \\ \Leftrightarrow 21-k &> 5k \quad (\because k > 0) \\ \therefore k &< \frac{7}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $1 \leq k \leq 3$ のとき、 $p_k > p_{k-1}$ である。また、 $\frac{p_k}{p_{k-1}} < 1$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{21-k}{5k} &< 1 \\ \Leftrightarrow 21-k &< 5k \quad (\because k > 0) \\ \therefore k &> \frac{7}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $4 \leq k \leq 20$ のとき、 $p_k < p_{k-1}$ である。以上より、

$$\begin{cases} p_0 < p_1 < p_2 < p_3 \\ p_3 > p_4 > \cdots > p_{20} \end{cases}$$

となり、 p_k は $k = 3$ で最大値をとるとわかる。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ
	-1	0	$-14x-7$	$-7\sqrt{7}i$
(2)	オ	カ	キ	
	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	

〔解説〕

(1)

$x^4+ax+a+b$ を x^2+x+2 で割った商は、 x^2 の係数が1である2次式となるから、実数 c,d を用いて x^2+cx+d とおくことができる。このとき、

$$\begin{aligned}x^4+ax+a+b&= (x^2+x+2)(x^2+cx+d)+2x+1 \\ \Leftrightarrow x^4+ax+a+b&= x^4+(c+1)x^3+(c+d+2)x^2+(2c+d+2)x+2d+1\end{aligned}$$

が x の値にかかわらず成立するから、

$$\begin{cases}0=c+1\\0=c+d+2\\a=2c+d+2\\a+b=2d+1\end{cases}$$

である。これを解くと、 $a=-1, b=0, c=-1, d=-1$ とわかる。ここで、

$$\begin{aligned}P(x)&= (x^4+ax+a+b)^3 \\ &= \left\{(x^2+x+2)(x^2-x-1)+(2x+1)\right\}^3\end{aligned}$$

であるから、 $P(x)$ は x の整式 $Q(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}P(x)&= (x^2+x+2)Q(x)+(2x+1)^3 \\ &= (x^2+x+2)Q(x)+8x^3+12x^2+6x+1 \\ &= (x^2+x+2)\{Q(x)+8x+4\}-14x-7\end{aligned}$$

と表される。したがって、 $P(x)$ を x^2+x+2 で割ると余りは $-14x-7$ である。また、

$$\begin{aligned}x^2+x+2&=0 \\ \Leftrightarrow x&= \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}\end{aligned}$$

より、 $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ は2次方程式 $x^2+x+2=0$ の解の一つであるから、

$$\begin{aligned}P\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)&= 0-14\cdot\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}-7 \\ &= -7\sqrt{7}i\end{aligned}$$

である。

(2)

条件より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&= s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= (2t, s+2t, s) \\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}&= \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= (2t, s+2t-1, s-1)\end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は垂直であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}&= 0 \\ \Leftrightarrow 2t\cdot 2t+(s+2t)\cdot(s+2t-1)+s\cdot(s-1)&= 0 \\ \Leftrightarrow 2s^2+4st+8t^2-2s-2t&= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。また、 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$ であるから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&= 1 \\ \Leftrightarrow (2t)^2+(s+2t)^2+s^2&= 1 \\ \Leftrightarrow 2s^2+4st+8t^2&= 1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

である。ここで、 $\textcircled{2}-\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned}2s+2t&= 1 \\ \Leftrightarrow s&= \frac{1}{2}-t\end{aligned}$$

である。これを $\textcircled{2}$ に代入して解くと

$$\begin{aligned}2\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+4\left(\frac{1}{2}-t\right)t+8t^2&= 1 \\ \Leftrightarrow t^2&= \frac{1}{12} \\ \therefore t&= \pm\frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

とわかる。ここで、点Pは△OABの内部にあるから、

$$0<s<1, 0<t<1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

である。したがって、

$$t= \frac{\sqrt{3}}{6}$$

である。また、

$$s= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}= \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

であり、これは $\textcircled{3}$ をみたす。このとき、

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right), \overrightarrow{\mathrm{OB}}= (2, 2, 0)$$

であるから、

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1, |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2\sqrt{2}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}= \sqrt{3}+1$$

である。したがって、

$$\cos\angle\mathrm{POB}= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

より、

$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{POB}&= \sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{POB}} \\ &= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \left(\because \sin\angle\mathrm{POB}>0\right)\end{aligned}$$

である。よって、△OPBの面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cdot\sin\angle\mathrm{POB}&= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{aligned}$$

である。

[3]

(1)

$$\begin{aligned} g(x)-f(x) &= (x-a)^3-(x-a)+2a-x^3+x \\ &= -3ax^2+3a^2x-a^3+3a \end{aligned}$$

であるから、方程式 $g(x)-f(x)=0$ は

$$\begin{aligned} -3ax^2+3a^2x-a^3+3a &= 0 \\ \Leftrightarrow -3x^2+3ax-a^2+3 &= 0 \end{aligned}$$

という2次方程式となる。この方程式が異なる2つの実数解をもつから、判別式を D とおくと

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow 9a^2+12(-a^2+3) &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 &< 12 \\ \Leftrightarrow -2\sqrt{3} &< a < 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。いま、 a は正の実数であるから、求める範囲は $0 < a < 2\sqrt{3}$ である。

(答) $0 < a < 2\sqrt{3}$

(2)

$g(x)-f(x)$ を x について平方完成すると

$$\begin{aligned} g(x)-f(x) &= -3ax^2+3a^2x-a^3+3a \\ &= -3a\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^3}{4}+3a \end{aligned}$$

となる。よって、 $a > 0$ より、 $g(x)-f(x)$ は $x = \frac{a}{2}$ のとき、最大値は $-\frac{a^3}{4}+3a$ をとる。

(答) 最大値: $-\frac{a^3}{4}+3a$, そのときの x の値: $x = \frac{a}{2}$

(3)

(1) と (2) の結果より、 $h(a) = -\frac{a^3}{4}+3a$ ($0 < a < 2\sqrt{3}$) となる。 $h(a)$ を微分すると

$$\begin{aligned} h'(a) &= -\frac{3}{4}a^2+3 \\ &= -\frac{3}{4}(a^2-4) \\ &= -\frac{3}{4}(a-2)(a+2) \end{aligned}$$

となるから、その増減表は下表のようになる。

a	0	...	2	...	$2\sqrt{3}$
$h'(a)$		+	0	-	
$h(a)$		↗	4	↘	

したがって、 $h(a)$ は $a = 2$ のとき最大値4をとる。

(答) 最大値: 4, そのときの a の値: $a = 2$

(4)

$a = 2$ のとき、方程式 $g(x)-f(x) = 0$ を解くと、

$$\begin{aligned} -6x^2+12x-2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

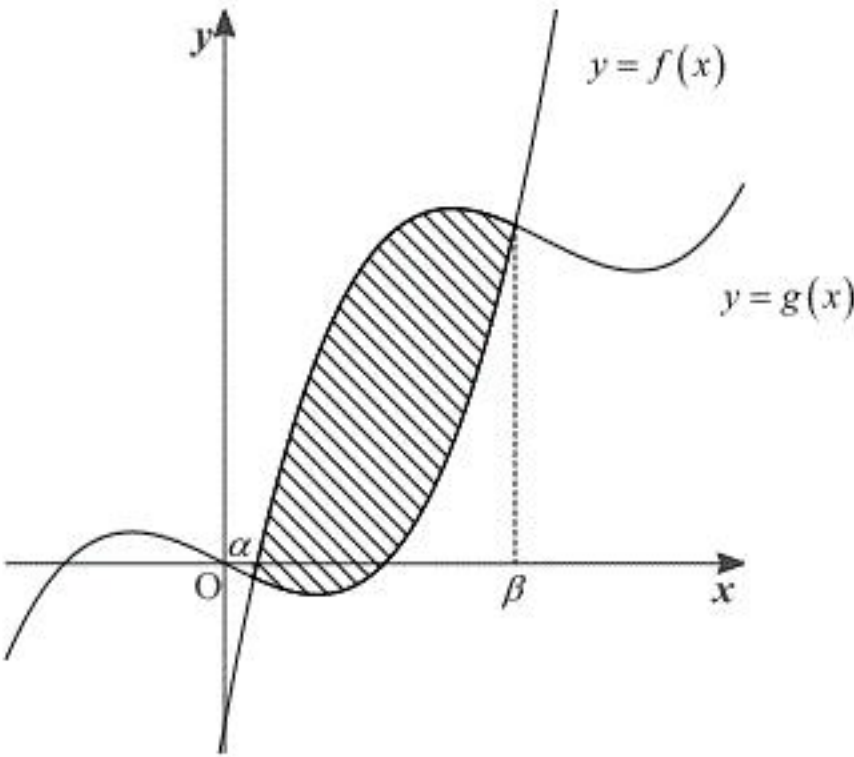
となるから、曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ は2つの交点をもち、その x 座標は $\frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$ である。ここで、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-1 \\ &= (\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1) \end{aligned}$$

より、 $y = f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

また、 $y = g(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを x 方向に2、 y 方向に-4だけ平行移動したものである。したがって、 $\alpha = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$, $\beta = \frac{3+\sqrt{6}}{3}$ とおくと、曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ のグラフは下図のようになる。



ここで、 $\alpha \leq x \leq \beta$ のとき、 $g(x)-f(x) \geq 0$ である。したがって、求める面積は上図の斜線部であり、これを S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x)-f(x)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (-6x^2+12x-2) dx \\ &= -6 \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= (\beta-\alpha)^3 \\ &= \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^3 \\ &= \frac{16\sqrt{6}}{9} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{16\sqrt{6}}{9}$