

[1]

[解答]

(1)		ア	イ	ウ	エ
		$\frac{11}{9}$	$2a^2-a+1$	$-\frac{a^2}{4}+2a$	$2a^2+5a+1$
(2)	(i)	オ			
		$\frac{37}{1000}$			
	(ii)	カ			
		$\frac{15}{37}$			
	(iii)	キ			
		$\frac{773}{963}$			

[解説]

(1)

与えられた関数は

$$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+2a\left(a-1\leq x\leq a+1\right)$$

と変形できる。 x の定義域と放物線の軸の中心の大小は

$$(a-1)-\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{2}a-1=\frac{3}{2}\left(a-\frac{2}{3}\right)\cdots\cdots\textcircled{1}$$

$$(a+1)-\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{2}a+1=\frac{3}{2}\left(a+\frac{2}{3}\right)\cdots\cdots\textcircled{2}$$

となる。したがって $a=\frac{2}{3}$ のとき、

$$y=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\left(-\frac{1}{3}\leq x\leq \frac{5}{3}\right)$$

となることから、 $a=-\frac{1}{3}$ で最小となり m の値は $m=\frac{11}{9}$ となる。 $a\geq \frac{2}{3}$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $-\frac{a}{2}\leq$

$a-1$ となるから与えられた関数は定義域の左端 $x=a-1$ で最小値をとり、

$$\begin{aligned}y&=(a-1)^2+a(a-1)+2a\\&=2a^2-a+1\end{aligned}$$

となることから m の値は $m=2a^2-a+1$ となる。 $-\frac{2}{3}\leq a\leq \frac{2}{3}$ のとき、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より $a-1\leq -\frac{a}{2}$

$\leq a+1$ となるから、与えられた関数は放物線の軸 $x=-\frac{a}{2}$ で最小値をとり、 m の値は

$m=-\frac{a^2}{4}+2a$ となる。 $a\leq -\frac{2}{3}$ のとき、 $\textcircled{2}$ より $-\frac{a}{2}\geq a+1$ となることから与えられた関数は

定義域の右端 $x=a+1$ で最小値をとり、

$$\begin{aligned}y&=(a+1)^2+a(a+1)+2a\\&=2a^2+5a+1\end{aligned}$$

となることから m の値は $m=2a^2+5a+1$ となる。

(2)(i)

箱Aのくじと箱Bのくじと箱Cのくじを5:3:2の割合で混ぜていることから

、求める確率は

$$\frac{3}{100}\cdot\frac{5}{10}+\frac{4}{100}\cdot\frac{3}{10}+\frac{5}{100}\cdot\frac{2}{10}=\frac{37}{1000}$$

となる。

(ii)

混ぜたくじの中から箱Aの当たりくじを取り出す確率は

$$\frac{3}{100}\cdot\frac{5}{10}=\frac{3}{200}$$

となる。(i)の結果から、当たりくじを取り出す確率は $\frac{37}{1000}$ であるから、求める条件付き確率

は

$$\frac{\frac{3}{200}}{\frac{37}{1000}}=\frac{15}{37}$$

となる。

(iii)

混ぜたくじの中から箱A、箱Bのはずれくじを取り出す確率は

$$\frac{97}{100}\cdot\frac{5}{10}+\frac{96}{100}\cdot\frac{3}{10}=\frac{773}{1000}$$

となる。はずれくじを取り出す事象は(i)で考えた事象の余事象であることから、(i)よりはず

れくじを取り出す確率は

$$1-\frac{37}{1000}=\frac{963}{1000}$$

と分かる。したがって求める条件付き確率は

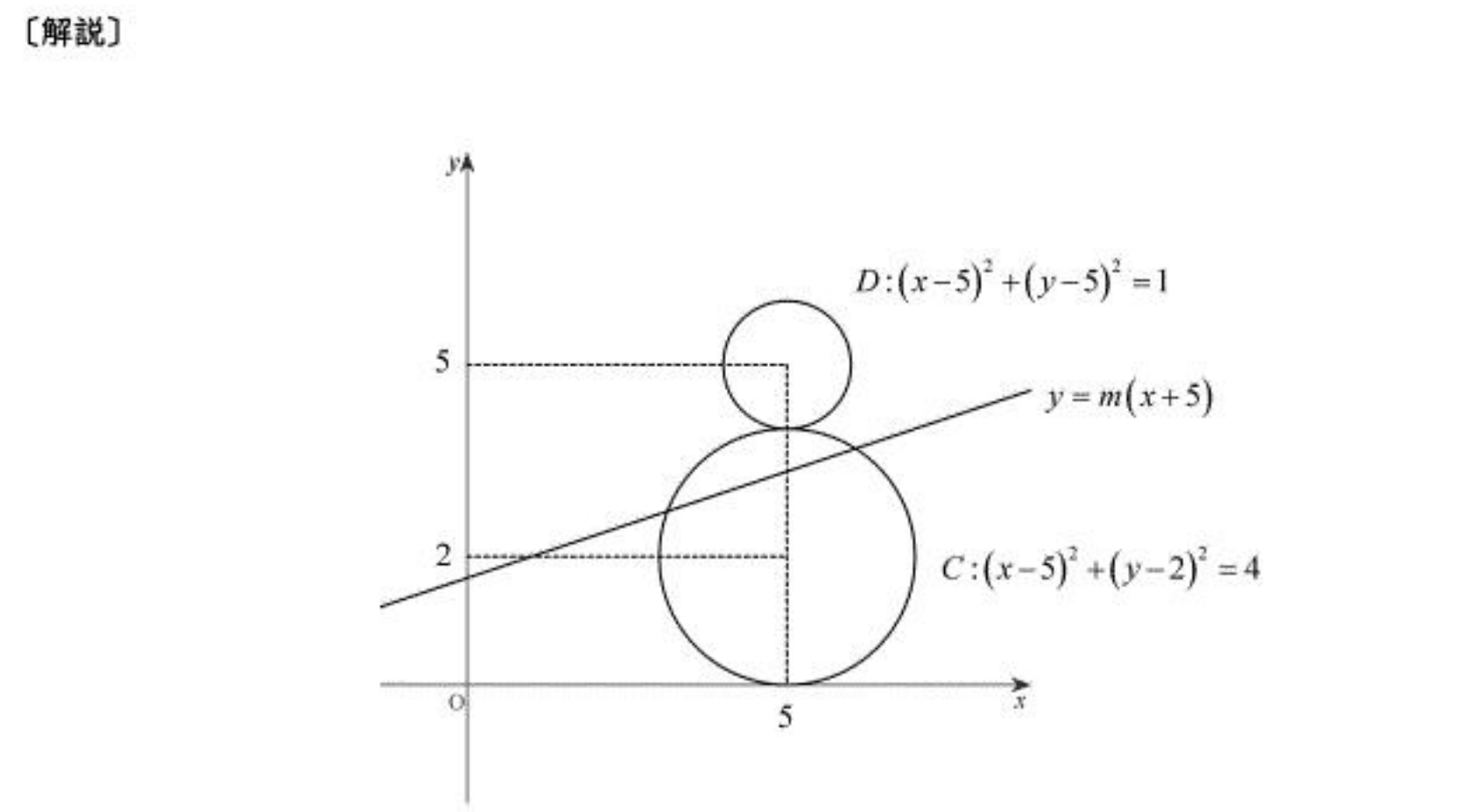
$$\frac{\frac{773}{1000}}{\frac{963}{1000}}=\frac{773}{963}$$

となる。

[2]

[解答]

(1)		ア	イ	ウ	エ
		0	$\frac{5}{12}$	$\frac{x^2}{12}-\frac{5}{6}x+\frac{49}{12}$	$\frac{-5+\sqrt{31}}{3}$
(2)	(i)	カ			
		$\frac{24}{5}$			
	(ii)	キ	ク		
		$48dn+d^2n-2d^2n^2$	5		



(1)
与えられた条件から、直線 l の式は $y=m(x+5)$ とおける。直線 l と円 C が共有点をもつには、直線 l と点 $(5, 2)$ の距離が 2 以下となればよい。よって点と直線の距離の公式から、

$$\begin{aligned} \frac{|5m-2+5m|}{\sqrt{m^2+1}} &\leq 2 \\ \Leftrightarrow |5m-1| &\leq \sqrt{m^2+1} \left(\because \sqrt{m^2+1} > 0 \right) \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで①の両辺が正であることから両辺を 2 乗して整理すると、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow (5m-1)^2 \leq m^2+1 \\ &\Leftrightarrow m\left(m-\frac{5}{12}\right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{5}{12} \end{aligned}$$

となる。また、円 D と外接し、 x 軸と接する円を円 E とする。円 E は x 軸と接し、 y 軸より上にあることから $y \geq 0$ であり、円 E の半径は y となる。また、円 D と外接する条件から

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2}-1 &= y \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2+(y-5)^2} &= y+1 \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $y \geq 0$ より②の右辺は正なので、両辺を 2 乗しても同値である。したがって、両辺を 2 乗して整理すると

$$\begin{aligned} (x-5)^2+(y-5)^2 &= (y+1)^2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{x^2}{12}-\frac{5}{6}x+\frac{49}{12} \end{aligned}$$

となる。また、直線 l が曲線 $y=\frac{x^2}{12}-\frac{5}{6}x+\frac{49}{12}$ と共有点をもつ条件は、

$$\begin{aligned} mx+5m &= \frac{x^2}{12}-\frac{5}{6}x+\frac{49}{12} \\ \Leftrightarrow x^2-2(6m+5)x+49-60m &= 0 \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が実数解をもつことである。よって③の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (6m+5)^2-(49-60m) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 3m^2+10m-2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow m \leq \frac{-5-\sqrt{31}}{3}, \frac{-5+\sqrt{31}}{3} \leq m \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 \leq m \leq \frac{5}{12}$ であり、 $\frac{-5-\sqrt{31}}{3} < 0 < \frac{-5+\sqrt{31}}{3} < \frac{5}{12}$ から、 m の取りうる値の

範囲は $\frac{-5+\sqrt{31}}{3} \leq m \leq \frac{5}{12}$ となる。

(2)(i)
等差数列の和の公式から、 S_n は
$$S_n=\frac{n}{2}\{2\cdot(-24)+(n-1)d\}$$
となる。 $S_{11}=0$ となるから
$$\begin{aligned} S_{11} &= 0 \\ \Leftrightarrow 11(5d-24) &= 0 \\ \Leftrightarrow d &= \frac{24}{5} \end{aligned}$$
である。

(ii)
$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n(a_{2k-1}^2-a_{2k}^2) \\ &= \sum_{k=1}^n(a_{2k-1}+a_{2k})(a_{2k-1}-a_{2k}) \end{aligned}$$
である。ここで、問題文の条件から数列 $\{a_n\}$ の一般項は
$$a_n=-24+d(n-1)$$
であるから、 T_n を d, n を用いて表すと
$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n(48+3d-4kd)d \\ &= (48+3d)dn-4d^2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= 48dn+d^2n-2d^2n^2 \end{aligned}$$
となる。 $d=6$ のとき、
$$T_n=324n-72n^2$$
となるから、
$$\begin{aligned} T_n &< 0 \\ \Leftrightarrow 72n^2-324n &> 0 \\ \Leftrightarrow n\left(n-\frac{9}{2}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow n &< 0, \frac{9}{2} < n \end{aligned}$$
となる。よって $T_n < 0$ となる最小の n は $n=5$ である。

[3]

(1)

$f(x)$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3)\end{aligned}$$

となる。よって $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

よって $\alpha=1, \beta=3$ となる。

(答) $\alpha=1, \beta=3$

(2)

$g(x)=f'(x)$ であるから、

$$\begin{aligned}g(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-2)^2 - 3\end{aligned}$$

となる。よって放物線 $y=g(x)$ の頂点は $(2, -3)$ である。 C_1 の頂点は $(1, 1)$ であるから、

$y=g(x)$ を x 軸方向に -1 、 y 軸方向に 4 だけ平行移動して、 C_1 の式は

$$\begin{aligned}y-4 &= 3(x-1)^2 - 3 \\ \Leftrightarrow y &= 3x^2 - 6x + 4\end{aligned}$$

となる。 C_2 の頂点は $(3, -3)$ であるから、 $y=g(x)$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動して、 C_2 の式は

$$\begin{aligned}y &= 3(x-3)^2 - 3 \\ \Leftrightarrow y &= 3x^2 - 18x + 24\end{aligned}$$

となる。よって C_1 と C_2 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}3x^2 - 6x + 4 &= 3x^2 - 18x + 24 \\ \Leftrightarrow 12x &= 20 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $x=\frac{5}{3}$

(3)

C_1 の式の両辺を x で微分すると

$$y' = 6x - 6$$

となるから、 t を実数とすると、 C_1 上の点 $(t, 3t^2 - 6t + 4)$ における接線の式は

$$\begin{aligned}y - 3t^2 + 6t - 4 &= (6t - 6)(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= 6(t-1)x - 3t^2 + 4\end{aligned}$$

となる。これが C_2 とも接すればよい。よって x の 2 次方程式

$$\begin{aligned}6(t-1)x - 3t^2 + 4 &= 3x^2 - 18x + 24 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 6(t+2)x + 3t^2 + 20 &= 0\end{aligned}$$

が重解をもてばよい。つまり、判別式を D として $D=0$ が成り立てばよいから、

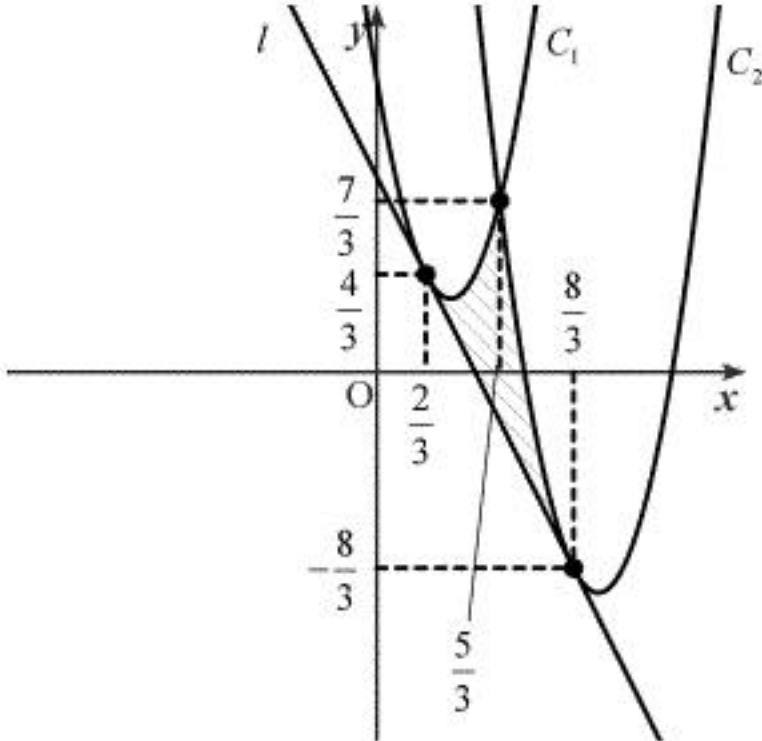
$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 9(t+2)^2 - 3(3t^2 + 20) &= 0 \\ \Leftrightarrow 36t &= 24 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。よって l の方程式は $y = -2x + \frac{8}{3}$ となる。

(答) $y = -2x + \frac{8}{3}$

(4)

求める面積は下図斜線部の面積となる。



よって求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} \left\{ (3x^2 - 6x + 4) - \left(-2x + \frac{8}{3} \right) \right\} dx + \int_{\frac{5}{3}}^{\frac{8}{3}} \left\{ (3x^2 - 18x + 24) - \left(-2x + \frac{8}{3} \right) \right\} dx \\ &= 3 \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 dx + 3 \int_{\frac{5}{3}}^{\frac{8}{3}} \left(x - \frac{8}{3} \right)^2 dx \\ &= \left[\left(x - \frac{2}{3} \right)^3 \right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} + \left[\left(x - \frac{8}{3} \right)^3 \right]_{\frac{5}{3}}^{\frac{8}{3}} \\ &= 2\end{aligned}$$

となる。

(答) 2