

【1】

【解答】

(1)	(i)	ア		
		14		
	(ii)	イ		
		6		
	(iii)	ウ	エ	
		3	16	
(2)		オ	カ	キ
		$\frac{7}{9}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{49}{61}$

【解説】

(1)(i)

$x=4$ であるとき、データの平均は

$$\frac{2+13+10+5+8+4}{6}=7$$

である。したがって、データの分散は

$$\frac{1}{6}\left\{(2-7)^2+(13-7)^2+(10-7)^2+(5-7)^2+(8-7)^2+(4-7)^2\right\}=14$$

である。

(ii)

この題の6個のデータの中央値は、3番目に大きい値と4番目に大きい値の平均値である。
ここで、 x の値で場合分けし、中央値が7となる条件を考える。

[1] $x<5$ のとき

このときデータの中央値は

$$\frac{5+8}{2}=6.5$$

であり、中央値は7にはならず不適である。

[2] $5\leq x<10$ のとき

このときデータの中央値は $\frac{x+8}{2}$ であり、これが7に等しいことから

$$\begin{aligned}\frac{x+8}{2}&=7 \\ \therefore x&=6\end{aligned}$$

となる。これは $5\leq x<10$ をみたす。

[3] $10\leq x$ のとき

このときデータの中央値は

$$\frac{8+10}{2}=9$$

であり、中央値は7にはならず不適である。

以上、[1], [2], [3]より、中央値が7となるときの x の値は $x=6$ である。

(iii)

この題の6個のデータの平均値は

$$\frac{2+13+10+5+8+x}{6}=\frac{x+38}{6}$$

である。(ii)から、中央値は

$$\left\{\begin{array}{ll}x<5\text{のとき}&6.5\\5\leq x<10\text{のとき}&\frac{x+8}{2}\\10\leq x\text{のとき}&9\end{array}\right.$$

となる。以下、 x の値に応じて場合分けして考える。

[1] $x<5$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{x+38}{6}&=6.5 \\ \therefore x&=1\end{aligned}$$

となる。これは $x<5$ をみたす。

[2] $5\leq x<10$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{x+38}{6}&=\frac{x+8}{2} \\ \therefore x&=7\end{aligned}$$

と求まる。これは $5\leq x\leq 10$ をみたす。

[3] $10\leq x$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{x+38}{6}&=9 \\ \therefore x&=16\end{aligned}$$

と求まる。これは $x>10$ をみたす。

以上、[1], [2], [3]より、求める x の値は $x=1, 7, 16$ の3つであり、このうち最大のものは $x=16$ である。

(2)

時刻 n に点PがAにある確率を p_n とおく。このとき時刻 n に点PがBにある確率は $1-p_n$ である。したがって条件より

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=\frac{2}{3}p_n+1\cdot(1-p_n) \\ &=1-\frac{1}{3}p_n\end{aligned}$$

となる。よって、 $p_0=1$ より、

$$p_1=\frac{2}{3}, p_2=\frac{7}{9}, p_3=\frac{20}{27}$$

である。次に、時刻4に点PがAにあったとき、時刻2に点PがAにある条件付き確率を求める。時刻2に点PがAにあり、かつ時刻4にAにある確率は

$$p_2\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot1\right)=\frac{49}{81}$$

である。時刻2に点PがBにあり、かつ時刻4にAにある確率は

$$(1-p_2)\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$$

であるから、求める条件付き確率は

$$\begin{aligned}\frac{\frac{49}{81}}{\frac{49}{81}+\frac{4}{27}}&=\frac{49}{61}\end{aligned}$$

である。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	$\frac{3}{2}t^2-3t+\frac{1}{2}$	-1	$3\sqrt{2}+\frac{7}{2}$	
(2)	エ	オ	カ	キ
	30	35	$\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$	$\frac{1}{2}\left\{35-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}\right\}$

〔解説〕

(1)

$t = \sin x + \cos x$ の両辺を 2 乗すると

$$t^2 = 1 + 2\sin x \cos x$$

$$\therefore \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} y &= (\sin x - 1)(\cos x - 1) + \sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 1 \\ &= 3\sin x \cos x - 3(\sin x + \cos x) + 2 \\ &= 3 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} - 3t + 2 \\ &= \frac{3}{2}t^2 - 3t + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}(t - 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

であり、 $0 \leq x < 2\pi$ から t の取りうる値の範囲は $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ である。これより y は $t = 1$ で最小値 -1 をとり、 $t = -\sqrt{2}$ で最大値 $3\sqrt{2} + \frac{7}{2}$ をとる。

(2)

条件より、 $a_0 = 5, b_0 = x$ である。また、 a_{n+1} を a_n と b_n で表すと

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{\frac{a_n}{100} \cdot 60 + \frac{b_n}{100} \cdot 40}{100} \cdot 100 \\ &= \frac{3}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n \end{aligned}$$

となる。ここに $a_1 = 15, a_0 = 5, b_0 = x$ を代入すると

$$15 = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot x$$

$$\therefore x = 30$$

となる。同様に、 b_{n+1} を a_n と b_n で表すと

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{\frac{a_n}{100} \cdot 40 + \frac{b_n}{100} \cdot 60}{100} \cdot 100 \\ &= \frac{2}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= \left(\frac{3}{5}a_{n-1} + \frac{2}{5}b_{n-1}\right) + \left(\frac{2}{5}a_{n-1} + \frac{3}{5}b_{n-1}\right) \\ &= a_n + b_n \end{aligned}$$

が成立し、数列 $\{a_n + b_n\}$ は定数列となる。したがって

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= a_0 + b_0 \\ &= 35 \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \left(\frac{2}{5}a_{n-1} + \frac{3}{5}b_{n-1}\right) - \left(\frac{3}{5}a_{n-1} + \frac{2}{5}b_{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{5}(b_{n-1} - a_{n-1}) \end{aligned}$$

が成立し、 $b_0 - a_0 = 25$ から

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \left(\frac{1}{5}\right)^n (b_0 - a_0) \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

である。以上より

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\{(a_n + b_n) - (b_n - a_n)\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{35 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}\right\} \end{aligned}$$

である。

〔3〕

〔解答〕

(1)

$y = x^2 + \frac{25}{2}a + 1$ の両辺を x で微分すると

$$y' = 2x$$

となるから、点 P における D の接線 ℓ の方程式は

$$y = 2(x-1) + \frac{25}{2}a + 2$$

$$\therefore y = 2x + \frac{25}{2}a$$

となる。

$$(答) \quad y = 2x + \frac{25}{2}a$$

(2)

$y = ax^2 + bx + 1$ の両辺を x で微分すると

$$y' = 2ax + b$$

であるから、点 P における C の接線の傾きは $2a + b$ である。この接線と(1)で求めた接線 ℓ が直交するから

$$(2a + b) \cdot 2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2a + b = -\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。さらに、放物線 C は点 P を通るから

$$\frac{25}{2}a + 2 = a + b + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{23}{2}a - b = -1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。以上①、②を連立して解くと

$$(a, b) = \left(-\frac{1}{9}, -\frac{5}{18}\right)$$

となる。

$$(答) \quad (a, b) = \left(-\frac{1}{9}, -\frac{5}{18}\right)$$

(3)

(2)より、 C と D の方程式は

$$\begin{cases} C: y = -\frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{18}x + 1 \\ D: y = x^2 - \frac{7}{18} \end{cases}$$

となる。これより、 C と D の交点の x 座標は

$$-\frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{18}x + 1 = x^2 - \frac{7}{18}$$

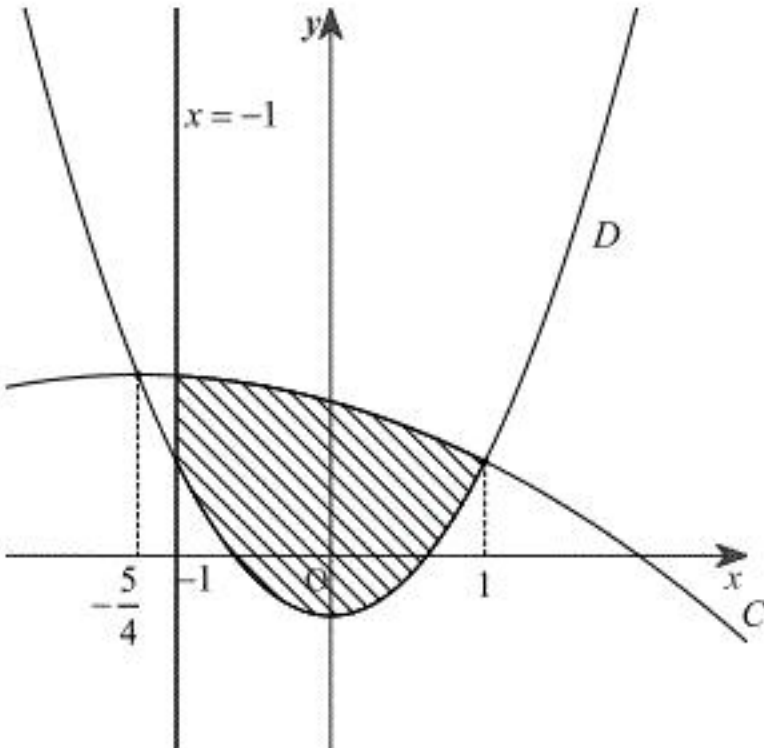
$$\Leftrightarrow \frac{10}{9}x^2 + \frac{5}{18}x - \frac{25}{18} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x + 5)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{5}{4}, 1$$

である。以上から C と D を図示すると以下のようになる。



求める面積は上図の斜線部の面積である。求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \left\{ \left(-\frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{18}x + 1 \right) - \left(x^2 - \frac{7}{18} \right) \right\} dx \\ &= -\frac{5}{18} \int_{-1}^1 (4x^2 + x - 5) dx \\ &= -\frac{5}{9} \int_0^1 (4x^2 - 5) dx \\ &= -\frac{5}{9} \left[\frac{4}{3}x^3 - 5x \right]_0^1 \\ &= \frac{55}{27} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{55}{27}$$