

〔1〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	$6\sqrt{7}$	$\frac{-3-5\sqrt{7}}{2}$	$\frac{423+244\sqrt{7}}{2}$	
(2)	エ	オ	カ	キ
	5	4	37	30

〔解説〕

(1)

$\alpha = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$ は $2x^2 + kx + 13 - k = 0$ の解であるから、代入すると

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^2 + k \cdot \frac{3-\sqrt{7}}{2} + 13 - k &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{16-6\sqrt{7}}{4} + \frac{3-\sqrt{7}}{2}k + 13 - k &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2}k &= -21 + 3\sqrt{7} \\ \therefore k &= 6\sqrt{7} \end{aligned}$$

となる。また、このとき解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{k}{2} = -3\sqrt{7} & \dots\dots ① \\ \alpha\beta = \frac{13-k}{2} = \frac{13-6\sqrt{7}}{2} & \dots\dots ② \end{cases}$$

が成り立つ。①に $\alpha = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$ を代入すると、 β の値は

$$\begin{aligned} \frac{3-\sqrt{7}}{2} + \beta &= -3\sqrt{7} \\ \therefore \beta &= \frac{-3-5\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。よって、

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= \frac{3-\sqrt{7}}{2} - \frac{-3-5\sqrt{7}}{2} \\ &= 3 + 2\sqrt{7} \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta \\ &= (-3\sqrt{7})^2 - \frac{13-6\sqrt{7}}{2} \\ &= \frac{113+6\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

であり、 $\alpha^3 - \beta^3$ の値は、

$$\begin{aligned} \alpha^3 - \beta^3 &= (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \\ &= (3 + 2\sqrt{7})\left(\frac{113+6\sqrt{7}}{2}\right) \\ &= \frac{423+244\sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$(a, b) = (5, 4)$ は $13a - 16b = 1$ の解であり、

$$13 \cdot 5 - 16 \cdot 4 = 1 \quad \dots\dots ③$$

が成り立つ。ここで、不定方程式 $13a - 16b = 1$ と③の辺々を引くと、

$$13(a-5) = 16(b-4)$$

が得られる。13と16は互いに素であるから、整数 k を用いて、

$$\begin{aligned} \begin{cases} a-5=16k \\ b-4=13k \end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, b) = (16k+5, 13k+4) \end{aligned}$$

と表せる。よって、 $13a - 16b = 1$ の解は $(a, b) = (16k+5, 13k+4)$ となる。したがって、 a を16で割った余りは5、 b を13で割った余りは4である。次に、1110の約数は、

$$1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, 37, 74, 111, 185, 222, 370, 555, 1110$$

である。このうち、13で割った余りが4であるのは30のみであるため、 $b=30$ である。このとき $k=2$ であるから、 $(a, b) = (37, 30)$ である。このとき a, b の最小公倍数は1110であるから、これは適する。

【2】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	
	6	10	14	
(2)	エ	オ	カ	キ
	(4, 2, -2)	$\frac{5}{\sqrt{177}}$	$3\sqrt{38}$	$\frac{2\sqrt{38}}{19}$

【解説】

(1)

$3\log_2 5 = \log_2 125$ であり、 $2^6 < 125 < 2^7$ であるから、

$$\begin{aligned} \log_2 2^6 &< \log_2 125 < \log_2 2^7 \\ \Leftrightarrow 6 &< 3\log_2 5 < 7 \end{aligned}$$

となる。よって求める自然数 m は $m = 6$ である。また、 $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$ より

$2^n < 2000 < 2^{n+1}$ を満たす自然数 n は $n = 10$ である。そして、

$$\begin{aligned} \frac{M\log_2 5}{\log_2 2000} &< 3 \\ \Leftrightarrow M &< 3 \cdot \frac{\log_2 2000}{\log_2 5} \\ \Leftrightarrow M &< 3\log_5 (2^4 \cdot 5^3) \\ \Leftrightarrow M &< 9 + \frac{12}{\log_2 5} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} 2 &< \log_2 5 < \frac{7}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{36}{7} &< \frac{12}{\log_2 5} < 6 \end{aligned}$$

であるから、

$$14 < \frac{99}{7} < 9 + \frac{12}{\log_2 5} < 15$$

となる。したがって、求める自然数 M のうち最大のものは $M = 14$ である。

(2)

$C(x, y, z) (x > 0)$ とおくと、題意より

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OC}} = 3x - y + 5z = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ \overrightarrow{\text{OB}} \cdot \overrightarrow{\text{OC}} = -x + y - z = 0 & \cdots \textcircled{2} \\ \left| \overrightarrow{\text{OC}} \right|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 24 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より $z = -\frac{1}{2}x$, $\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 5$ より $y = \frac{1}{2}x$ となるから、これらを $\textcircled{3}$ に代入す

ると

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{1}{2}x \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x \right)^2 &= 24 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 &= 24 \\ \therefore x &= 4 (\because x > 0) \end{aligned}$$

と求まる。よって点 C の座標は $(4, 2, -2)$ である。このとき $\overrightarrow{\text{CA}} = (-1, -3, 7)$,

$\overrightarrow{\text{CB}} = (-5, -1, 1)$ であり、 $|\overrightarrow{\text{CA}}| = \sqrt{59}$, $|\overrightarrow{\text{CB}}| = 3\sqrt{3}$, $\overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = 15$ となる。よって、

$$\begin{aligned} \cos \angle \text{ACB} &= \frac{\overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}}}{|\overrightarrow{\text{CA}}| \cdot |\overrightarrow{\text{CB}}|} \\ &= \frac{15}{\sqrt{59} \cdot 3\sqrt{3}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{177}} \end{aligned}$$

であり、 $\triangle \text{ABC}$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{\text{CA}}| \cdot |\overrightarrow{\text{CB}}| \cdot \sin \angle \text{ACB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{59} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{5}{\sqrt{177}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{59} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{152}{177}} \\ &= 3\sqrt{38} \end{aligned}$$

と求まる。さらに題意より実数 s, t, u を用いて $\overrightarrow{\text{OH}} = s\overrightarrow{\text{OA}} + t\overrightarrow{\text{OB}} + u\overrightarrow{\text{OC}} (s + t + u = 1)$ と表せて、

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{OH}} \cdot \overrightarrow{\text{CA}} = 0 & \cdots \textcircled{4} \\ \overrightarrow{\text{OH}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = 0 & \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

が成り立つ。 $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OH}} \cdot \overrightarrow{\text{CA}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3s - t + 4u, -s + t + 2u, 5s - t - 2u) \cdot (-1, -3, 7) &= 0 \\ \therefore 35s - 9t - 24u &= 0 & \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OH}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3s - t + 4u, -s + t + 2u, 5s - t - 2u) \cdot (-5, -1, 1) &= 0 \\ \therefore -9s + 3t - 24u &= 0 & \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

が得られ、 $\textcircled{6} - \textcircled{7}$, $\textcircled{6} + \textcircled{7} \times 3$ より $t = \frac{11}{3}s$, $u = \frac{1}{12}s$ となる。これらを $s + t + u = 1$ に代入すると、

$$\begin{aligned} s + \frac{11}{3}s + \frac{1}{12}s &= 1 \\ \therefore s &= \frac{4}{19} \end{aligned}$$

となり、 $(s, t, u) = \left(\frac{4}{19}, \frac{44}{57}, \frac{1}{57} \right)$ と求まる。したがって、 $\overrightarrow{\text{OH}}$ は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OH}} &= \frac{4}{19}\overrightarrow{\text{OA}} + \frac{44}{57}\overrightarrow{\text{OB}} + \frac{1}{57}\overrightarrow{\text{OC}} \\ &= \frac{4}{19}(3, -1, 5) + \frac{44}{57}(-1, 1, -1) + \frac{1}{57}(4, 2, -2) \\ &= \left(-\frac{4}{57}, \frac{34}{57}, \frac{14}{57} \right) \end{aligned}$$

と表せ、その長さ OH は

$$\begin{aligned} \text{OH} &= \sqrt{\left(-\frac{4}{57} \right)^2 + \left(\frac{34}{57} \right)^2 + \left(\frac{14}{57} \right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{38}}{19} \end{aligned}$$

である。

【3】

(1)

$$f(x)=(x-1)\{x^2-2(a+1)x+a^2-2\}より$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{x^3-(2a+3)x^2+(a^2+2a)x-a^2+2\}' \\ &= 3x^2-(4a+6)x+a^2+2a \\ &= (3x-a)(x-a-2) \end{aligned}$$

である。よって、 $f'(x)=0$ をみたすのは $x=\frac{a}{3}, a+2$ である。 $a>3$ より $\frac{a}{3}<a+2$ であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$\frac{a}{3}$	...	$a+2$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって増減表より求める x の値は $x=\frac{a}{3}, a+2$ である。

(答) $x=\frac{a}{3}, a+2$

(2)

$y=f(x), y=g(x)$ を連立して y を消去すると、

$$(x-1)\{x^2-2(a+1)x+a^2-2\}+(2a+3)(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\{x^2+x+a^2-2a-5\}=0 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

となる。曲線 $y=f(x)$ と放物線 $y=g(x)$ が異なる2個の共有点をもつとき、 $\textcircled{1}$ は異なる2個の解をもつ。すなわち、2次方程式 $x^2+x+a^2-2a-5=0$ が、 $x\neq 1$ の重解をもつか、 $x=1$ とそれ以外の解を1個もつ。以下、それぞれの場合について場合分けをして考える。

[1] 2次方程式 $x^2+x+a^2-2a-5=0$ が $x\neq 1$ の重解を持つ場合

この2次方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= 1-4(a^2-2a-5) \\ &= -4a^2+8a+21 \\ &= -(2a+3)(2a-7) \end{aligned}$$

となる。ここで、この2次方程式が重解をもつとき、 $D=0$ である。 $a>3$ であるため、

$$D=0 \text{となるのは } a=\frac{7}{2} \text{ のときである。また、このとき2次方程式は } x^2+x+\frac{1}{4}=0 \text{ となり、}$$

$$x=-\frac{1}{2} \text{ の重解を持つ。}$$

[2] $x^2+x+a^2-2a-5=0$ が $x=1$ とそれ以外の解を1つ持つ場合

$x=1$ を解にもつため代入して、

$$\begin{aligned} 1^2+1+a^2-2a-5 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2-2a-3 &= 0 \\ \therefore a &= -1, 3 \end{aligned}$$

となるが、 $a>3$ より不適である。

以上、[1], [2]より、求める a の値は $a=\frac{7}{2}$ である。

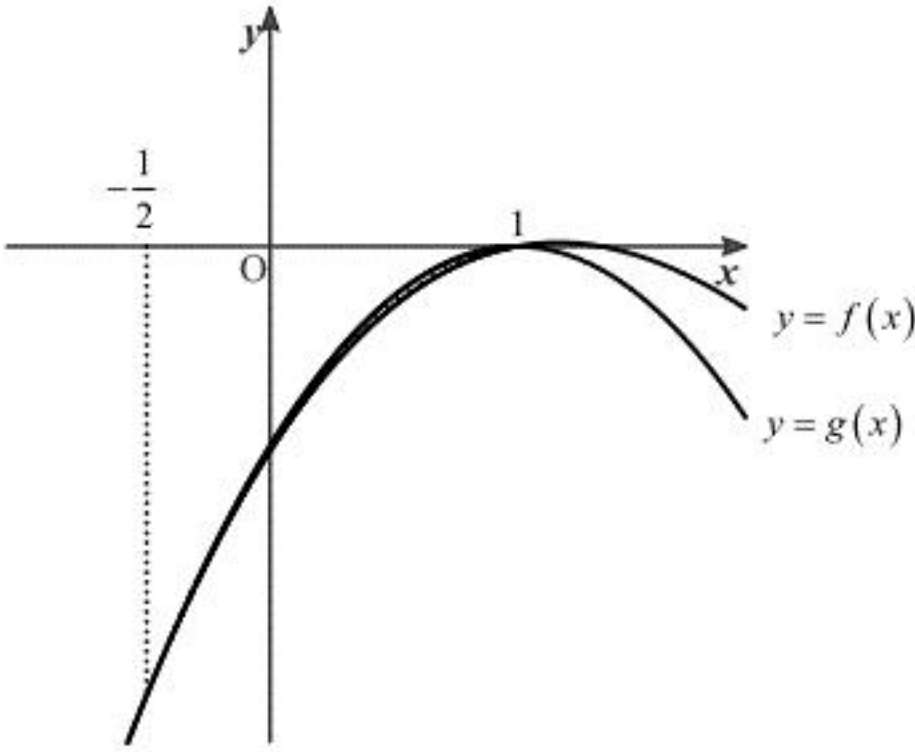
(答) $a=\frac{7}{2}$

(3)

$$a=\frac{7}{2} \text{ のとき } f(x)=(x-1)\left(x^2-9x+\frac{41}{4}\right), g(x)=-10(x-1)^2 \text{ となる。またこのとき、(1)より曲}$$

$$\text{線 } y=f(x) \text{ は } x=\frac{7}{6}, \frac{11}{2} \text{ で極値をとり、(2)より曲線 } y=f(x) \text{ と放物線 } y=g(x) \text{ は } x=-\frac{1}{2}, 1 \text{ で}$$

共有点をもつ。よって、曲線 $y=f(x)$ と放物線 $y=g(x)$ を図示すると下図のようになり、求める面積は下図の斜線部である。



求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \{g(x)-f(x)\}dx \\ &= -\int_{-\frac{1}{2}}^1 (x-1)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)dx \\ &= -\int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{4}x\right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= -\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{64}-\frac{3}{32}+\frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{3}{8}+\frac{3}{64} \\ &= \frac{27}{64} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{27}{64}$