

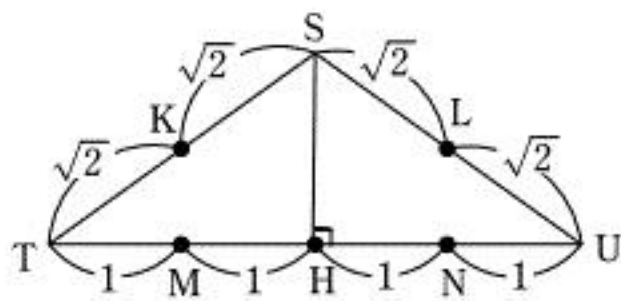
【1】

(1) 三角形 APQ で余弦定理より、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos \angle PAQ \\ &= 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 7 \end{aligned}$$

よって、 $PQ = \boxed{\sqrt{7}}$

次に、 $ST = SU = 2\sqrt{2}$ 、 $TU = 4$ の二等辺三角形において次のように点をとると、



$LN \parallel SH$ より、 $\angle LNU = 90^\circ$ であるから、三角形 LNU と三角形 LMN に順に三平方の定理を用いて、

$$\begin{aligned} LN &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 1 \\ LM &= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

よって、 $\triangle CBA \equiv \triangle COA \equiv \triangle STU$ より、

$$\begin{aligned} RP &= LN = 1 \\ RQ &= LM = \sqrt{5} \end{aligned}$$

したがって、三角形 PQR で余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \angle PQR &= \frac{PQ^2 + RQ^2 - RP^2}{2 \cdot PQ \cdot RQ} \\ &= \frac{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2 - 1^2}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{5}} \\ &= \frac{11}{2\sqrt{35}} \\ &= \boxed{\frac{11\sqrt{35}}{70}} \end{aligned}$$

よって、 $\sin \angle PQR = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{35}}$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \triangle PQR &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{35}} \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{19}}{4}} \end{aligned}$$

(2)(i) X が 2 の倍数であるとき

余事象は X が 2 の倍数でない、つまり

3 回とも奇数が出るときであるから、求める確率は

$$1 - \left(\frac{5}{10}\right)^3 = \boxed{\frac{7}{8}}$$

(ii) X が 3 の倍数であるとき

余事象は X が 3 の倍数でない、つまり

3 回とも 3 の倍数が出ないときであるから、求める確率は

$$1 - \left(\frac{7}{10}\right)^3 = \boxed{\frac{657}{1000}}$$

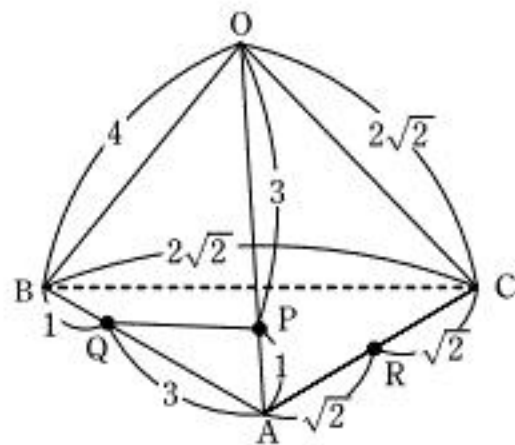
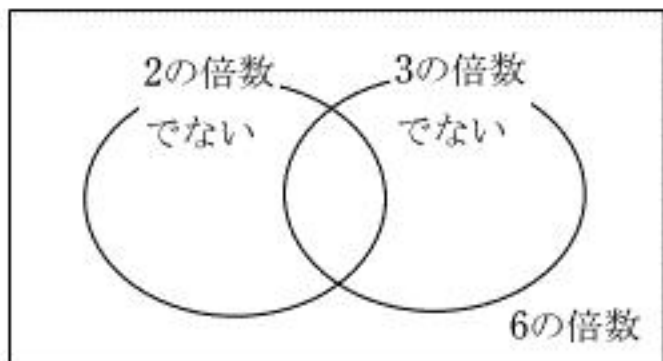
(iii) X が 2 の倍数でも 3 の倍数でもないとき

3 回とも 2 の倍数も 3 の倍数も出なければいいから、求める確率は

$$\left(\frac{3}{10}\right)^3 = \boxed{\frac{27}{1000}}$$

(iv) X が 6 の倍数である確率は、下の図と(i), (ii), (iii)より

$$\begin{aligned} &1 - \left\{ \left(\frac{5}{10}\right)^3 + \left(\frac{7}{10}\right)^3 - \left(\frac{3}{10}\right)^3 \right\} \\ &= \boxed{\frac{559}{1000}} \end{aligned}$$



[2]

(1) 真数条件より,

$$x+3>0 \quad \text{かつ} \quad 2-x>0$$

よって,

$$-3< x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} y &= 3\log_{3\sqrt{3}}(x+3) - \log_{\frac{1}{3}}(2-x) \\ &= 3 \cdot \frac{\log_3(x+3)}{\log_3 3\sqrt{3}} - \frac{\log_3(2-x)}{\log_3 \frac{1}{3}} \\ &= 3 \cdot \frac{\log_3(x+3)}{\frac{3}{2}} - \frac{\log_3(2-x)}{-1} \\ &= \log_3(x+3)^2 + \log_3(2-x) \\ &= \log_3(x+3)^2(2-x) \\ &= \log_3(-x^3-4x^2+3x+18) \end{aligned}$$

$f(x) = -x^3 - 4x^2 + 3x + 18$ とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 - 8x + 3 \\ &= -(3x-1)(x+3) \end{aligned}$$

よって, ①の範囲での $f(x)$ の増減は次のようになる.

x	-3	$\dots$	$\frac{1}{3}$	$\dots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{500}{27}$	$\searrow$	

底 $3 > 1$ より, $x = \boxed{\frac{1}{3}}_{\text{ア}}$ のとき y は最大値 $\log_3 \boxed{\frac{500}{27}}_{\text{イ}}$ をとる.

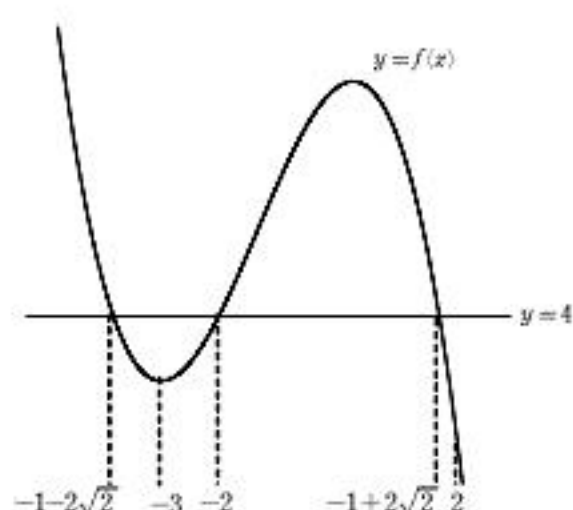
また, $y = \log_{\sqrt{3}} 2$ すなわち $y = \log_3 4$ のとき,

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \\ -x^3 - 4x^2 + 3x + 18 &= 4 \\ x^3 + 4x^2 - 3x - 14 &= 0 \\ (x+2)(x^2 + 2x - 7) &= 0 \\ x &= -2, -1 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって, $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = 4$ は図のようになるから,

底 $3 > 1$ より, $y > \log_{\sqrt{3}} 2$ のとき x の取りうる値の範囲は

$$\boxed{-2}_{\text{ウ}} < x < \boxed{-1+2\sqrt{2}}_{\text{エ}}$$



(2) $\{a_n\}$ の公差を d とすると, 条件から,

$$\begin{aligned} 2 + (2+d) + (2+2d) + (2+3d) + (2+4d) &= 70 \\ 10 + 10d &= 70 \\ d &= 6 \end{aligned}$$

よって, $a_n = 2 + (n-1) \cdot 6 = \boxed{6n-4}_{\text{オ}} \quad (n=1, 2, \dots\dots)$

次に,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{1}{2}n\{2 + (6n-4)\} \\ &= \boxed{n(3n-1)}_{\text{カ}} \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{S_k - 2k} &= \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k(3k-1) - 2k} \\ &= \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{3k(k-1)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots\dots + \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{1}{2} + \dots\dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10} \right) \\ &= \boxed{\frac{3}{10}}_{\text{キ}} \end{aligned}$$

[3]

$$(1) \quad f'(x) = 3x^2 + 2px - \frac{1}{3}(2p+1) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} l: y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= \left\{ 3 + 2p - \frac{1}{3}(2p+1) \right\} (x-1) + 1 + p - \frac{1}{3}(2p+1) \\ &= \frac{4}{3}(p+2)(x-1) + \frac{1}{3}(p+2) \\ &= \frac{4}{3}(p+2)x - (p+2) \\ &= \frac{4}{3}(p+2) \left(x - \frac{3}{4} \right) \quad (=h(x) \text{ とおく}) \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\frac{4}{3}(p+2)x - (p+2) = x^3 + px^2 - \frac{1}{3}(2p+1)x \text{ を解くと,}$$

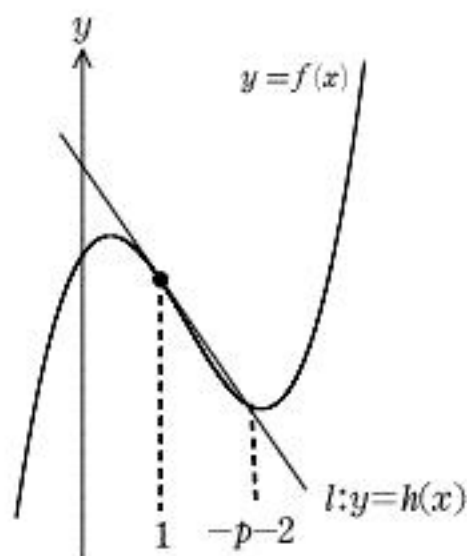
$$\begin{aligned} x^3 + px^2 - (2p+3)x + (p+2) &= 0 \\ (x-1)^2(x+p+2) &= 0 \end{aligned}$$

よって, l と $y=f(x)$ の共有点の x 座標は

$$x = 1, -p-2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \{h(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_0^1 \{-x^3 - px^2 + (2p+3)x - (p+2)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}px^3 + \frac{1}{2}(2p+3)x^2 - (p+2)x \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3}p + \frac{1}{2}(2p+3) - (p+2) \\ &= -\frac{1}{3}p - \frac{3}{4} \end{aligned}$$



$$\text{よって, } -\frac{1}{3}p - \frac{3}{4} = \frac{11}{12} \text{ のとき } p = -5 \quad (p < -3 \text{ を満たす}) \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad \sqrt{3} \sin t + \cos t = 2 \sin \left(t + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$0 \leq t \leq \pi \text{ のとき } \frac{\pi}{6} \leq t + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7}{6}\pi \text{ より,}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \sin \left(t + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$$

よって,

$$-1 \leq \sqrt{3} \sin t + \cos t \leq 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

ここで, $p = -5$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 5x^2 + 3x \\ f'(x) &= 3x^2 - 10x + 3 \\ &= (3x-1)(x-3) \end{aligned}$$

より, $-1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の増減は次のようになる.

x	-1	...	$\frac{1}{3}$	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-9	↗	$\frac{13}{27}$	↘	-6

以上から, $y = g(t)$ ($0 \leq t \leq \pi$) の

$$\text{最大値は } \frac{13}{27}, \text{ 最小値は } -9 \quad \dots\dots(\text{答})$$