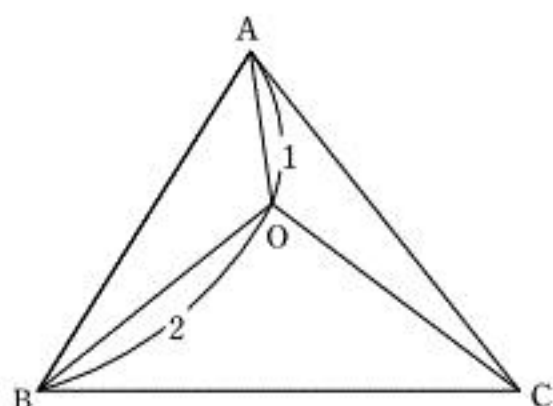


〔1〕

(1)

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{-1}{1 \cdot 2} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

より、 $\angle AOB = \boxed{120^\circ}$ 。



O は三角形 ABC の重心だから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OO} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ \overrightarrow{OC} &= -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

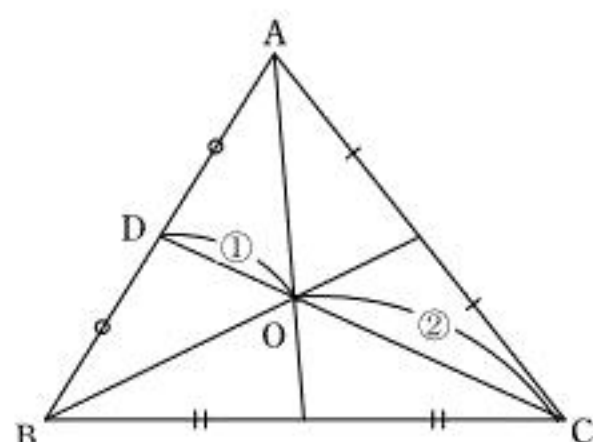
よって、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OC}|^2 &= |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 1^2 + 2 \cdot (-1) + 2^2 \\ &= 3\end{aligned}$$

より、 $|\overrightarrow{OC}| = \boxed{\sqrt{3}}$ 。

直線 CO と AB の交点を D とすると、 $CO:OD = 2:1$ であるから、

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= 3\triangle OAB \\ &= 3 \times \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin 120^\circ \\ &= 3 \times \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$



(2) $S_n = 2a_n - 5n + 3$ (*)

(*) で $n=1$ とすると、 $S_1 = a_1$ より、

$$\begin{aligned}a_1 &= 2a_1 - 5 \cdot 1 + 3 \\ a_1 &= \boxed{2}\end{aligned}$$

(*) で $n=2$ とすると、 $S_2 = a_1 + a_2$ より、

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 &= 2a_2 - 5 \cdot 2 + 3 \\ a_2 &= \boxed{9}\end{aligned}$$

また、(*) より、

$$S_{n+1} = 2a_{n+1} - 5(n+1) + 3$$

これと(*) の辺々を引いて、 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ より、

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_{n+1} - 2a_n - 5 \\ a_{n+1} &= \boxed{2a_n + 5}\end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned}a_{n+1} + 5 &= 2(a_n + 5) \\ a_n + 5 &= (a_1 + 5) 2^{n-1} \\ a_n &= \boxed{7 \cdot 2^{n-1} - 5}\end{aligned} \quad (n=1, 2, \dots)$$

(3)

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \cos 2\theta + 3\cos \theta - 1 \\ &= (2\cos^2 \theta - 1) + 3\cos \theta - 1 \\ &= 2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 2 \\ &= 2\left(\cos \theta + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}\end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より、

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \text{.....①}$$

であるから、 $f(\theta)$ の最小値は $\boxed{-\frac{25}{8}}$ 。

最大値は

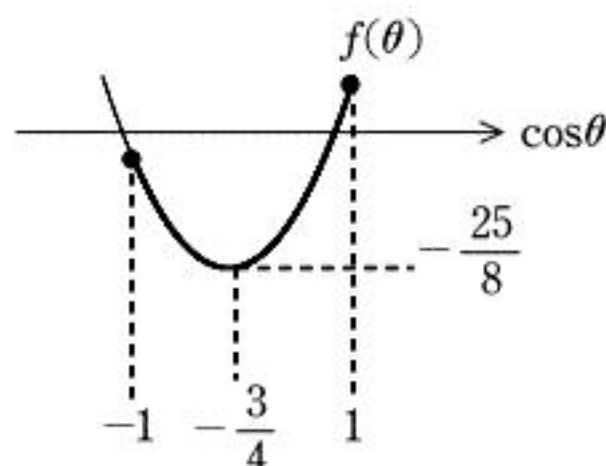
$$2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = \boxed{3}$$

また、

$$f(\theta) = (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 2)$$

より、 $f(\theta) = 0$ を解くと、①より、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1}{2} \\ \theta &= \boxed{\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$



〔2〕

(1) 2枚の硬貨を投げ、

$$2 \text{ 枚とも表が出る確率は } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{4}}_{\text{ア}}$$

$$1 \text{ 枚ずつ表と裏が出る確率は } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \times 2 = \boxed{\frac{1}{2}}_{\text{イ}}$$

(2) 2枚とも表, 2枚とも裏, 1枚ずつ表と裏が出る事象を順に A, B, C とする.

以下, 例えば順に A, C, B が起こるとき, $\boxed{A|C|B}$ などと表す.

$P_2: \boxed{A|A}$ となればよいから,

$$P_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{16}}_{\text{ウ}}$$

$P_3: \boxed{A|B|A}$ または $\boxed{B \text{ または } C|A|A}$ となればよいから,

$$P_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{16}}_{\text{エ}}$$

(3)

$$Q_3: \begin{array}{cc} \text{K} & \text{G} & \text{K} \\ \boxed{A} & | & \boxed{A} \end{array} \quad Q_3 = P_2 \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{16}}_{\text{オ}}$$

$$Q_4: \begin{array}{cc} \text{K} & \text{G} & \text{K} & \text{G} \\ \boxed{} & | & \boxed{A} & | & \boxed{A} \end{array} \quad Q_4 = (1 - P_2) \cdot P_2 = \boxed{\frac{15}{256}}_{\text{カ}}$$

$$Q_5: \begin{array}{cc} \text{K} & \text{G} & \text{K} & \text{G} & \text{K} \\ \boxed{} & | & \boxed{} & | & \boxed{A} \end{array} \quad Q_5 = P_3 \cdot (1 - P_2) = \boxed{\frac{15}{256}}_{\text{キ}}$$

$$Q_6: \begin{array}{cc} \text{K} & \text{G} & \text{K} & \text{G} & \text{K} & \text{G} \\ \boxed{} & | & \boxed{} & | & \boxed{} & | & \boxed{A} \end{array} \quad Q_6 = (1 - P_2 - P_3) \cdot P_3 = \boxed{\frac{7}{128}}_{\text{ク}}$$

6回目までに K が勝ちゲームが終了する確率は

$$Q_3 + Q_5 = \boxed{\frac{31}{256}}_{\text{ケ}}$$

7回目のゲームを行う確率は, $Q_2 = 0$ より,

$$1 - (Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) = \boxed{\frac{49}{64}}_{\text{コ}}$$

[3]

(1)

$$C_2: x^2 - 6x + y^2 - 2ay + 4a + 4 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-a)^2 = a^2 - 4a + 5 \quad (= (a-2)^2 + 1 > 0)$$

よって、 C_2 の中心は $\boxed{(3, a)}$ 、半径は $\boxed{\sqrt{a^2 - 4a + 5}}$ 、

(2) $C_2: (-2y+4)a + (x^2 - 6x + y^2 + 4) = 0$ より、

$$\begin{cases} -2y+4=0 & \dots\dots ① \\ x^2-6x+y^2+4=0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

を解く、

①より $y=2$ だから、②に代入して、

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x-4) = 0$$

$$x = 2, 4$$

よって、求める定点の座標は

$$\boxed{(2, 2)}_{\eta}, \boxed{(4, 2)}_{\varepsilon}$$

(3) 直線 $y = x + 1$ を l とする、

$$y = x + 1 \text{ より、 } x - y + 1 = 0$$

$$(l \text{ と } C_2 \text{ の中心の距離}) < (C_2 \text{ の半径})$$

であればよいから、

$$\frac{|3-a+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} < \sqrt{a^2-4a+5}$$

$$|a-4| < \sqrt{2(a^2-4a+5)}$$

$$a^2 - 8a + 16 < 2(a^2 - 4a + 5)$$

$$a^2 - 6 > 0$$

$$\boxed{a < -\sqrt{6}, \sqrt{6} < a}_{\ast}$$

(4) C_1 と C_2 の中心間の距離 = (C_1 の半径) + (C_2 の半径)

であればよいから、

$$\sqrt{3^2 + a^2} = 2 + \sqrt{a^2 - 4a + 5}$$

$$9 + a^2 = 4 + 4\sqrt{a^2 - 4a + 5} + a^2 - 4a + 5$$

$$a = \sqrt{a^2 - 4a + 5}$$

$$a^2 = a^2 - 4a + 5 \text{ かつ } a > 0$$

$$a = \boxed{\frac{5}{4}}_{\kappa}$$

(5) $a=1$ のとき

$$C_2: x^2 - 6x + y^2 - 2y + 8 = 0$$

よって、 k を実数として、

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 8 + k(x^2 + y^2 - 4) = 0 \quad \dots\dots (*)$$

は2点 A, B を通る図形を表す、

ここで、 $k=-1$ とすると、

$$-6x - 2y + 12 = 0$$

$$y = \boxed{-3x+6}_{\ast}$$

次に、(*)が点(0, 0)を通るとき、

$$8 - 4k = 0$$

$$k = 2$$

このとき(*)は、

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 8 + 2(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - \frac{2}{3}y = 0$$

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

であるから、求める円の中心は $\boxed{\left(1, \frac{1}{3}\right)}_{\eta}$ 、半径は $\boxed{\frac{\sqrt{10}}{3}}_{\eta}$

(6) $a=0$ のとき、 C_2 の中心は(3, 0)、半径は $\sqrt{5}$ 、

(x_1, y_1) は C_1 上の点であるから、

$$x_1^2 + y_1^2 = 4 \quad \dots\dots ③$$

が成り立つ、

また、この点における C_1 の接線 m の方程式は

$$m: x_1x + y_1y - 4 = 0$$

これが C_2 に接するとき、

$$(m \text{ と } C_2 \text{ の中心の距離}) = (C_2 \text{ の半径})$$

であればよいから、

$$\frac{|3x_1 - 4|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = \sqrt{5}$$

③より、

$$\frac{|3x_1 - 4|}{\sqrt{4}} = \sqrt{5}$$

$$3x_1 - 4 = \pm 2\sqrt{5}$$

$-2 \leq x_1 \leq 2$ より、

$$x_1 = \boxed{\frac{4-2\sqrt{5}}{3}}_{\varepsilon}$$

[4]

$$(1) \quad f'(x) = 2ax + b, \quad g'(x) = \frac{c}{x}$$

条件から,

$$\begin{cases} f(1) = 0 & \dots\dots ① \\ f'(1) = g'(1) & \dots\dots ② \end{cases}$$

$$①より, \quad a + b - 1 = 0$$

$$②より, \quad 2a + b = c$$

よって,

$$a = c - 1, \quad b = -c + 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_1^2 \log x \, dx &= \int_1^2 (x)' \log x \, dx \\ &= [x \log x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= [x \log x - x]_1^2 \\ &= (2 \log 2 - 2) - (-1) \\ &= 2 \log 2 - 1 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (\log x)^2 \, dx &= \int_1^2 (x)' \cdot (\log x)^2 \, dx \\ &= [x (\log x)^2]_1^2 - \int_1^2 x \cdot 2(\log x) \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= [x (\log x)^2 - 2(x \log x - x)]_1^2 \\ &= \{2(\log 2)^2 - 2(2 \log 2 - 2)\} - 2 \\ &= 2(\log 2)^2 - 4 \log 2 + 2 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(c-1)x^2 + (-c+2)x - 1 - c \log x\} \, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(c-1)x^3 + \frac{1}{2}(-c+2)x^2 - x \right]_1^2 - c \int_1^2 \log x \, dx \\ &= \frac{1}{3}(c-1) \cdot 7 + \frac{1}{2}(-c+2) \cdot 3 - 1 - c(2 \log 2 - 1) \\ &= \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2} - 2 \log 2 + 1 \right) c + \left(-\frac{7}{3} + 3 - 1 \right) \\ &= \left(\frac{11}{6} - 2 \log 2 \right) c - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } S = \frac{10}{3} - 4 \log 2 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{11}{6} - 2 \log 2 \right) c - \frac{1}{3} &= \frac{10}{3} - 4 \log 2 \\ \left(\frac{11}{6} - 2 \log 2 \right) c &= \frac{11}{3} - 4 \log 2 \\ \therefore c &= 2 \end{aligned}$$

すなわち,

$$a = 1, \quad b = 0$$

このとき,

$$f(x) = x^2 - 1$$

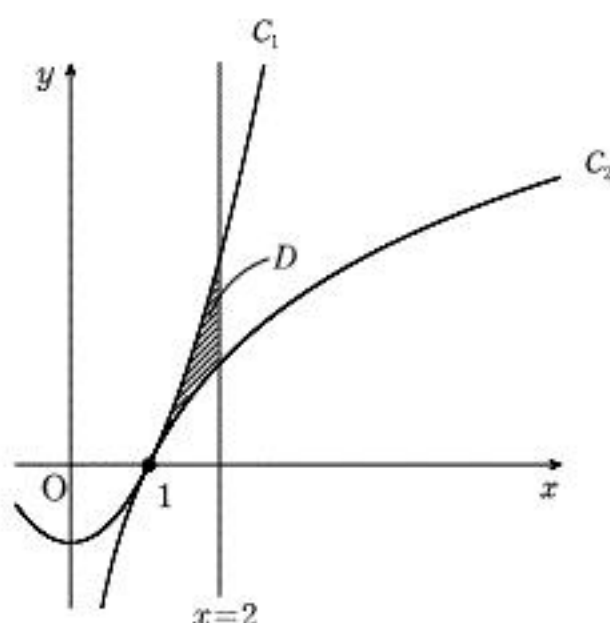
$$f'(x) = 2x$$

よって, 直線 l の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= 2(x-1) \\ &= 2x - 2 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $c = 2$ のとき, $f(x) = x^2 - 1, g(x) = 2 \log x$ であるから,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 (x^2 - 1)^2 \, dx - \pi \int_1^2 (2 \log x)^2 \, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{3} x^3 + x \right]_1^2 - 4\pi \int_1^2 (\log x)^2 \, dx \\ &= \pi \left(\frac{31}{5} - \frac{14}{3} + 1 \right) - 4\pi \{2(\log 2)^2 - 4 \log 2 + 2\} \\ &= 2\pi \left[-4(\log 2)^2 + 8 \log 2 - \frac{41}{15} \right] \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



.....(答)