

【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ
(1)	$\frac{s^2-2}{3}$	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$\frac{17}{12}$
	オ	カ	キ	
(2)	$\frac{7}{15}$	$\frac{13}{105}$	$\frac{5}{6}$	

【解説】

(1)

$s = x + y$ より

$$x^2 - xy + y^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 - 3xy = 2$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{s^2 - 2}{3}$$

となる。また、解と係数の関係より t についての 2 次方程式 $t^2 - st + \frac{s^2 - 2}{3} = 0$ は x, y を 2 解に

持つ。 x, y は実数であるから、この 2 次方程式の判別式を D とすると、条件を満たす実数 x, y が存在する条件は

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 - \frac{4}{3}(s^2 - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow s^2 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq s \leq 2\sqrt{2}$$

である。これが求める s の範囲である。ここで

$$\begin{aligned} x + y - xy &= s - \frac{s^2 - 2}{3} \\ &= -\frac{1}{3}(s^2 - 3s) + \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{3}\left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{12} \end{aligned}$$

であり、 $-2\sqrt{2} \leq s \leq 2\sqrt{2}$ から $x + y - xy$ は $s = \frac{3}{2}$ のときに最大値 $\frac{17}{12}$ をとる。

(2)

どの玉を取り出すかは同様に確からしい。(i)で取り出した 2 個の玉が同じ色であるためには、これらがともに白玉であるか、ともに赤玉であればよいので、その確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} + \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} &= \frac{6+15}{45} \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

である。つぎに、4 個の玉を取り出して終了するのは以下の [1], [2] の場合である。

[1] (i)で赤玉を 2 個取り出し、(iii)でまず赤玉を 1 個取り出し、その後白玉を 1 個取り出して終了する場合

その確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} &= \frac{15}{45} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \\ &= \frac{2}{21} \end{aligned}$$

である。

[2] (i)で白玉を 2 個取り出し、(iii)でまず白玉を 1 個取り出し、その後赤玉を 1 個取り出して終了する場合

その確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} &= \frac{6}{45} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} \\ &= \frac{1}{35} \end{aligned}$$

である。

以上 [1], [2] は互いに排反であるから、4 個の玉を取り出して終了する確率は

$$\frac{2}{21} + \frac{1}{35} = \frac{13}{105}$$

である。つぎに、4 個以上の玉を取り出して終了する事象を事象 A、3 回目に袋から取り出した玉が赤玉である事象を事象 B とする。事象 A は、(i)で同じ色の玉を 2 個取り出し、(iii)で(i)と同じ色の玉を取り出す事象であるから、その確率は

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} \cdot \frac{4}{8} + \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} \cdot \frac{2}{8} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

である。3 回目に袋から取り出した玉が赤玉であり、かつ 4 個以上の玉を取り出して終了するのは、(i)で赤玉を 2 個取り出し、(iii)でまず赤玉を 1 個取り出した場合である。この場合、3 個玉を取り出した時点では終了しないため、4 個以上の玉を取り出して終了する。したがって、その確率は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} \cdot \frac{4}{8} \\ &= \frac{15}{45} \cdot \frac{4}{8} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。したがって、求める条件付き確率は

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{1} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

である。

【2】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	
	$\frac{5}{2}$	$9k + \frac{21}{2}$	$\frac{66}{5}k$	
(2)	エ	オ	カ	キ
	$\sqrt{3}$	$\frac{4}{15}\vec{a} + \frac{2}{15}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

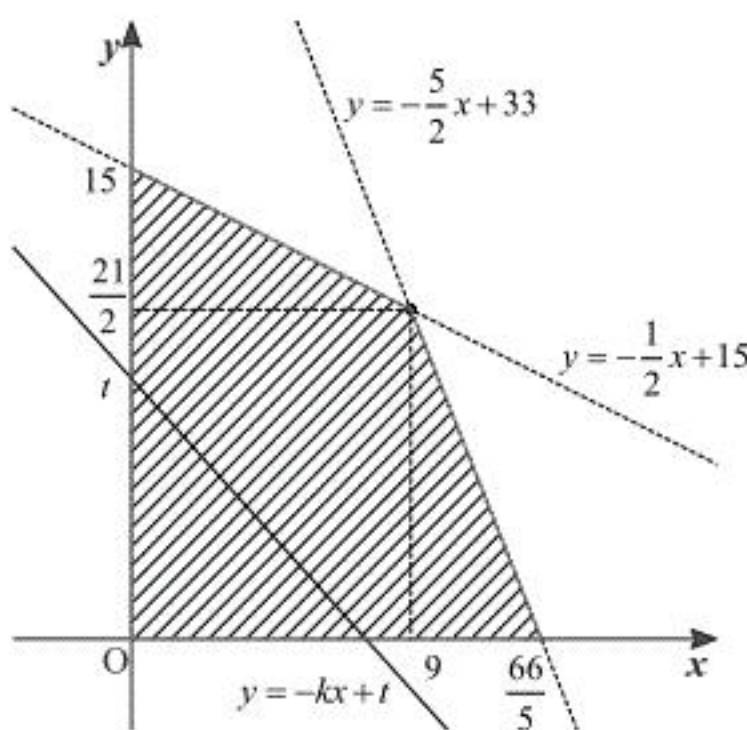
【解説】

(1)

$kx + y = t$ とすると、 $y = -kx + t$ となり、これは直線の方程式である。これを直線 l とすると、領域 D と直線 l が共有点を持つような t の値の最大値を求めればよい。領域 D の境界 $x + 2y = 30$, $5x + 2y = 66$ の交点の座標は

$$\begin{cases} x + 2y = 30 \\ 5x + 2y = 66 \end{cases}$$
$$\therefore (x, y) = \left(9, \frac{21}{2}\right)$$

である。したがって、領域 D と直線 l を図示すると以下のようになる。



いま $1 \leq k \leq 3$ であるから、 $y = -kx + t$ の傾きによって場合分けする。

[1] $-\frac{5}{2} \leq -k \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq \frac{5}{2}$ のとき

このとき、 t が最大値をとるのは $y = -kx + t$ が点 $\left(9, \frac{21}{2}\right)$ を通る場合である。したがって

$$\frac{21}{2} = -9k + t$$
$$\Leftrightarrow t = 9k + \frac{21}{2}$$

となり、これが t の最大値である。

[2] $-3 \leq -k \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq k \leq 3$ のとき

このとき、 t が最大値をとるのは $y = -kx + t$ が点 $\left(\frac{66}{5}, 0\right)$ を通る場合である。したがって

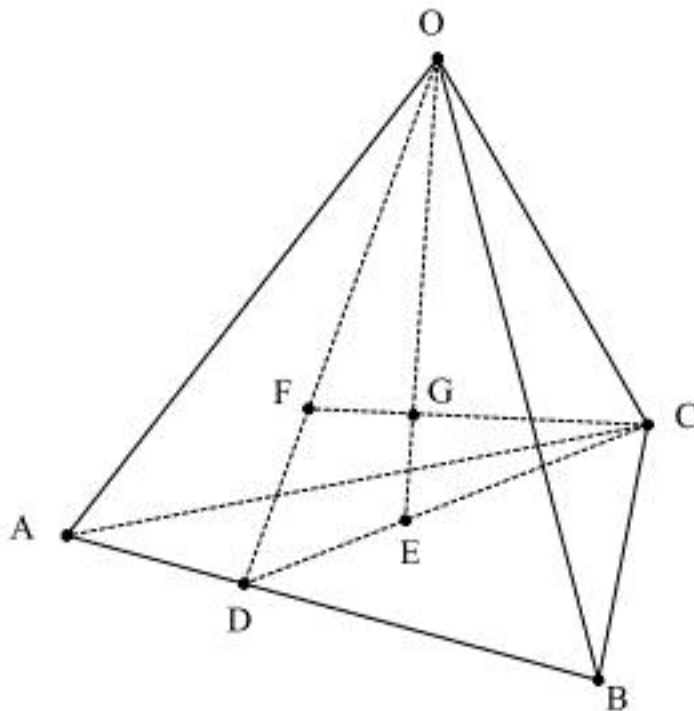
$$0 = -\frac{66}{5}k + t$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{66}{5}k$$

となり、これが t の最大値である。

以上、[1], [2] より、求める最大値は $1 \leq k \leq \frac{5}{2}$ のときは $9k + \frac{21}{2}$ であり、 $\frac{5}{2} \leq k \leq 3$ のとき $\frac{66}{5}k$ である。

(2)

四面体 $OABC$ と点 E, F, G を図示すると以下のようになる。



$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ であるから

$$|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{\frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b}}$$
$$= \sqrt{\frac{16 + 3 + 8}{9}}$$
$$= \sqrt{3}$$

となる。点 E は線分 CD を $2:3$ に内分するから

$$\overrightarrow{OE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OD}$$
$$= \frac{4}{15}\vec{a} + \frac{2}{15}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$$

となる。ここで、 $\triangle ODE$ と直線 CF にメネラウスの定理を用いて

$$\frac{CE}{DC} \cdot \frac{GO}{EG} \cdot \frac{FD}{OF} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{GO}{EG} \cdot \frac{1}{2} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{GO}{EG} = 5$$
$$\Leftrightarrow OG:GE = 5:1$$
$$\Leftrightarrow OG:OE = 5:6$$
$$\Leftrightarrow \frac{OG}{OE} = \frac{5}{6}$$

となる。以上から

$$\overrightarrow{OG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{OE}$$
$$= \frac{5}{6} \left(\frac{4}{15}\vec{a} + \frac{2}{15}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c} \right)$$
$$= \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

である。

【3】

(1)

実数定数 k を用いて $k = \int_{-1}^1 f(t) dt$ とおくと, $f(x) = -x^3 + ax^2 + k$ と表せる。このとき

$$\begin{aligned} k &= \int_{-1}^1 f(t) dt \\ \Leftrightarrow k &= \int_{-1}^1 (-t^3 + at^2 + k) dt \\ \Leftrightarrow k &= 2 \int_0^1 (at^2 + k) dt \quad (\because -t^3 \text{ は奇関数, } at^2, k \text{ は偶関数}) \\ \Leftrightarrow k &= 2 \left[\frac{a}{3} t^3 + kt \right]_0^1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{2}{3} a + 2k \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{2}{3} a \end{aligned}$$

である。したがって, $\int_{-1}^1 f(t) dt = -\frac{2}{3} a$ である。

(答) $\int_{-1}^1 f(t) dt = -\frac{2}{3} a$

(2)

(1)より $f(x) = -x^3 + ax^2 - \frac{2}{3} a$ であるから, 両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 2ax \\ &= -3x \left(x - \frac{2}{3} a \right) \end{aligned}$$

となる。 $a > 0$ なので, 増減表をかくと以下のようなになる。

x	...	0	...	$\frac{2}{3} a$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{2}{3} a$	$\nearrow$	$\frac{4}{27} a^3 - \frac{2}{3} a$	$\searrow$

以上から, 極小値は $f(0) = -\frac{2}{3} a$ であり, $-\frac{2}{3} a = -2 \Leftrightarrow a = 3$ となる。このとき, 極大値は

$f(2) = 2$ である。

(答) $a = 3$, 極大値は $f(2) = 2$

(3)

$f(x) = -x - 2$ を解くと

$$\begin{aligned} f(x) &= -x - 2 \\ \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 2 &= -x - 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0, x^2 - 3x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで $g(x) = x^2 - 3x - 1$ とすると, $g(0) = -1 < 0$ より 2 次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ は正の解を 1 つ, 負の解を 1 つもつ。したがって α, β はそれぞれ 2 次方程式 $x^2 - 3x - 1 = 0$ の負の解, 正の解に一致する。解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

であるから

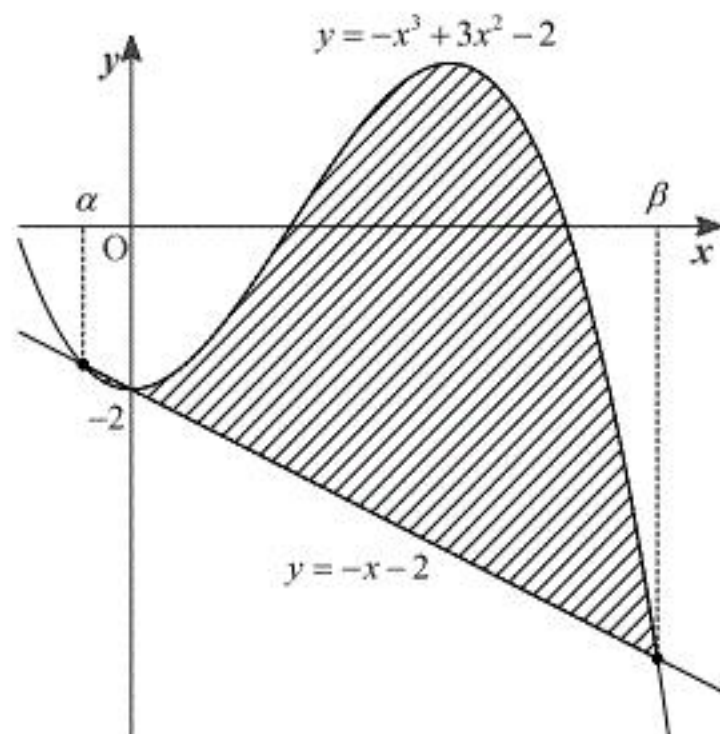
$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 11 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\alpha^2 + \beta^2 = 11$

(4)

$y = f(x), y = -x - 2$ を図示すると以下のようなになる。



上図の斜線部の面積を求めればよい。求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^0 (-x - 2 - f(x)) dx + \int_0^{\beta} \{f(x) - (-x - 2)\} dx \\ &= \int_0^{\alpha} \{f(x) - (-x - 2)\} dx + \int_0^{\beta} \{f(x) - (-x - 2)\} dx \\ &= \int_0^{\alpha} (-x^3 + 3x^2 + x) dx + \int_0^{\beta} (-x^3 + 3x^2 + x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4} x^4 + x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\alpha} + \left[-\frac{1}{4} x^4 + x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\beta} \\ &= -\frac{1}{4} (\alpha^4 + \beta^4) + (\alpha^3 + \beta^3) + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 \right\} + (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

となる。ここに(3)で求めた $\alpha + \beta, \alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2$ の値を代入して

$$\begin{aligned} S &= -\frac{119}{4} + 36 + \frac{11}{2} \\ &= \frac{-119 + 144 + 22}{4} \\ &= \frac{47}{4} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\frac{47}{4}$