

〔1〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	$\sqrt{5}$	5	4	
(2)	エ	オ	カ	
	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	
(3)	キ	ク	ケ	コ
	$t^2 - 4t + 3$	-1	2	$-\log_3 2$

〔解説〕

(1)

$$|z^2| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

より、 $|z^2| = |z|^2$ であることに注意すると $|z| = \sqrt{5}$ となる。 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ より

$$\bar{z} = \frac{5}{z}$$

である。また、

$$\begin{aligned} (z + \bar{z})^2 &= z^2 + 2|z|^2 + (\bar{z})^2 \\ &= z^2 + 2|z|^2 + \overline{z^2} \\ &= (-3 + 4i) + 2 \cdot 5 + (-3 - 4i) \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} \frac{3}{1-x^4} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow 3 &= A(1+x)(1+x^2) + B(1-x)(1+x^2) + C(1+x)(1-x) \\ \Leftrightarrow (A-B)x^3 + (A+B-C)x^2 + (A-B)x + (A+B+C-3) &= 0 \end{aligned}$$

であり、これは x についての恒等式であるので

$$\begin{aligned} \begin{cases} A-B=0 \\ A+B-C=0 \\ A+B+C-3=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (A, B, C) &= \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。

(3)

$$\frac{1}{3^x} = t \text{ より}$$

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4x} - \frac{4}{3^x} + 3 \\ &= \left(\frac{1}{3^x}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3^x} + 3 \\ &= t^2 - 4t + 3 \end{aligned}$$

となる。 $\frac{1}{3^x} = t$ から $t > 0$ である。

$$\begin{aligned} y &= t^2 - 4t + 3 \\ &= (t-2)^2 - 1 \end{aligned}$$

より、 $t=2$ で関数 y は最小値 -1 をとる。また、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{4x} - \frac{4}{3^x} + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3^{-x})^2 - 4 \cdot 3^{-x} + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3^{-x} - 2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3^{-x} &= 2 \\ \Leftrightarrow -x &= \log_3 2 \\ \therefore x &= -\log_3 2 \end{aligned}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ
	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{16}{243}$
(2)	オ	カ	キ	ク
	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{22}{27}$	$\frac{20}{27}$
(3)	ケ			
	$-P_{n-1}$			
(4)	コ			
	$\frac{2}{27}Q_{n-3}$			

〔解説〕

(1)

n 回目に赤玉を取り出し、操作を終了しない確率を A_n 、 n 回目に白玉を取り出し、操作を終了しない確率を B_n とする。このとき、操作が n 回以上繰り返される確率は $Q_n = P_n + A_n + B_n$ で表される。赤玉を取り出す確率は $\frac{1}{3}$ 、白玉を取り出す確率は $\frac{2}{3}$ である。 $n+1$ 回目に終了するとき、 n 回目に赤玉を取り出し $n+1$ 回目に赤玉を取り出している。よって、 $P_{n+1} = \frac{1}{3}A_n$ である。また、 $n+1$ 回目に赤玉を取り出し、操作を終了しないとき、 n 回目に白玉を取り出している。よって、 $A_{n+1} = \frac{1}{3}B_n$ である。また、 $n+1$ 回目に白玉を取り出し、操作を終了しないとき、 n 回目に取り出すのはどちらの玉でもよい。よって、 $B_{n+1} = \frac{2}{3}(A_n + B_n)$ である。

$$A_1 = \frac{1}{3}, B_1 = \frac{2}{3} \text{ より}$$

$$P_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, A_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, B_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$P_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}, A_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}, B_3 = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{27}$$

$$P_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{27}, A_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{27} = \frac{16}{81}, B_4 = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{9} + \frac{16}{27} \right) = \frac{44}{81}$$

$$P_5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{81} = \frac{16}{243}, A_5 = \frac{1}{3} \cdot \frac{44}{81} = \frac{44}{243}, B_5 = \frac{2}{3} \left(\frac{16}{81} + \frac{44}{81} \right) = \frac{40}{81}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= P_{n+1} + A_{n+1} + B_{n+1} \\ &= \frac{1}{3}A_n + \frac{1}{3}B_n + \frac{2}{3}(A_n + B_n) \\ &= A_n + B_n \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \frac{2}{3}(A_n + B_n) \\ &= \frac{2}{3}Q_{n+1} \end{aligned}$$

より $B_n = \frac{2}{3}Q_n$ であり、 $Q_n = \frac{3}{2}B_n$ となる。したがって、(1)より

$$Q_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1, Q_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{27} = \frac{8}{9}, Q_4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{44}{81} = \frac{22}{27}, Q_5 = \frac{3}{2} \cdot \frac{40}{81} = \frac{20}{27}$$

となる。

(3)

(1), (2)より $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} Q_n - Q_{n-1} &= (A_{n-1} + B_{n-1}) - (P_{n-1} + A_{n-1} + B_{n-1}) \\ &= -P_{n-1} \end{aligned}$$

である。

(4)

(1), (2)より $n \geq 4$ のとき

$$P_{n-1} = \frac{1}{3}A_{n-2} = \frac{1}{9}B_{n-3} = \frac{2}{27}Q_{n-3}$$

である。

【3】

【解答】

	ア	イ	ウ	エ	
(1)	$\frac{1}{3}$	3	$\frac{40}{9}-2\log 3$	$-9x+6$	
(2)	オ				
	$\frac{a+2}{2}$				
	カ	キ	ク	ケ	コ
(3)	$2-\sqrt{3}$	$7+4\sqrt{3}$	2	$4\sqrt{3}-2\log(2+\sqrt{3})$	$3\sqrt{3}$

【解説】

(1)

$a=\frac{4}{3}$ のとき直線 ℓ の方程式は

$$y=-\left(x-\frac{4}{3}\right)+2$$

$$\Leftrightarrow y=-x+\frac{10}{3}$$

となる。よって、曲線 C の方程式 $y=\frac{1}{x}$ と連立して

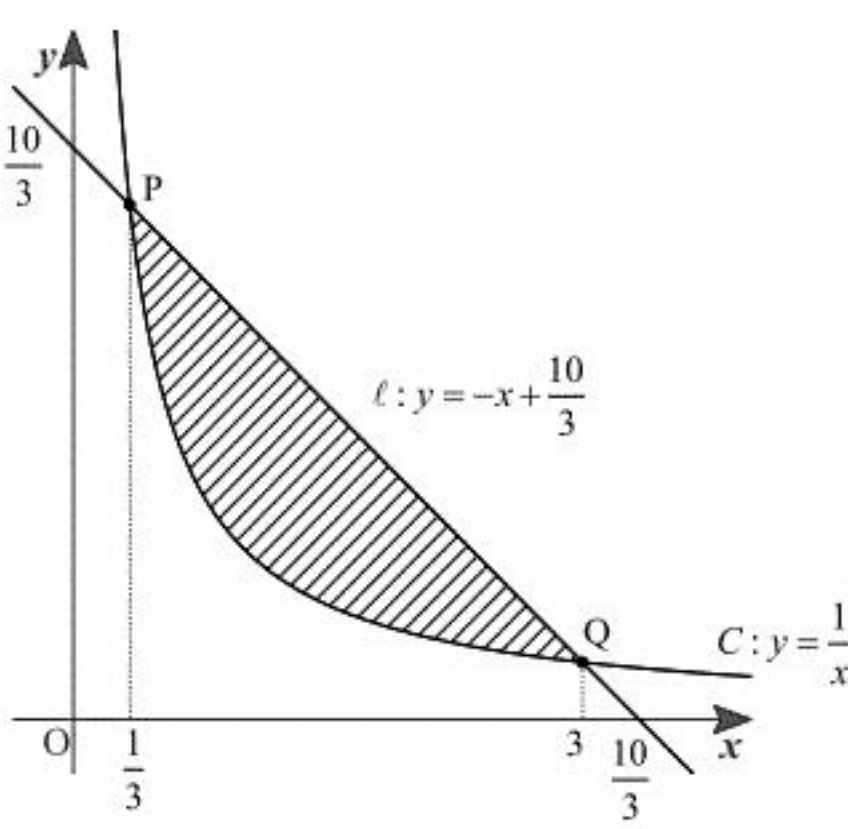
$$\frac{1}{x}=-x+\frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{10}{3}x+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{3}, 3$$

となる。 $p < q$ より $(p, q)=\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ である。また、このとき直線 ℓ と曲線 C で囲まれた部分の面積は下図斜線部である。



よって、斜線部の面積は

$$\int_{\frac{1}{3}}^3 \left(-x + \frac{10}{3} - \frac{1}{x}\right) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{10}{3}x - \log|x|\right]_{\frac{1}{3}}^3$$

$$= -\frac{1}{2}\left(9 - \frac{1}{9}\right) + \frac{10}{3}\left(3 - \frac{1}{3}\right) - \log 3 + \log \frac{1}{3}$$

$$= \frac{40}{9} - 2\log 3$$

となる。曲線 C について、 $y'=-\frac{1}{x^2}$ より点 $P\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ での接線 m の方程式は

$$y=-\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\left(x-\frac{1}{3}\right)+3$$

$$\Leftrightarrow y=-9x+6$$

となる。

(2)

直線 ℓ の方程式は $y=-(x-a)+2$ より曲線 C の方程式 $y=\frac{1}{x}$ と連立して

$$\frac{1}{x}=-(x-a)+2$$

$$\Leftrightarrow x^2-(a+2)x+1=0$$

となる。 p, q はこの2次方程式の2解であるから、解と係数の関係から $p+q=a+2$ である。よって、線分 PQ の中点 M の x 座標は

$$\frac{p+q}{2}=\frac{a+2}{2}$$

となる。

(3)

曲線 C について、 $y'=-\frac{1}{x^2}$ より点 $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$ での接線 m 、点 $Q\left(q, \frac{1}{q}\right)$ での接線 n の方程式はそれぞれ

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{p^2}(x-p)+\frac{1}{p} \\ y=-\frac{1}{q^2}(x-q)+\frac{1}{q} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{p^2}x+\frac{2}{p} \\ y=-\frac{1}{q^2}x+\frac{2}{q} \end{cases}$$

となる。2直線の交点が $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ であるから、それぞれの方程式に代入して

$$\begin{cases} \frac{1}{2}=-\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{p} \\ \frac{1}{2}=-\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{q} \end{cases}$$

となる。よって、対称性から

$$\frac{1}{2}=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+1=0$$

の2解が p, q であるので、 $p < q$ より $(p, q)=(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ である。よって、

$$\frac{q}{p}=\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=(2+\sqrt{3})^2$$

$$=7+4\sqrt{3}$$

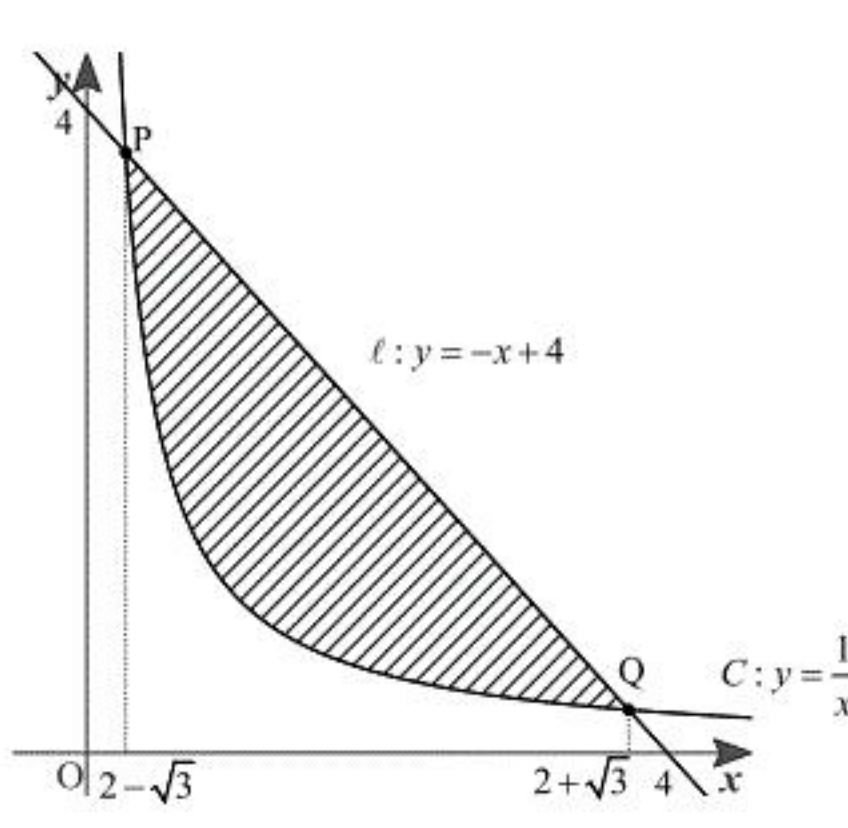
となる。また、解と係数の関係から

$$p+q=a+2$$

$$\Leftrightarrow 4=a+2$$

$$\therefore a=2$$

である。よって、直線 ℓ の方程式は $y=-x+4$ である。このとき直線 ℓ と曲線 C で囲まれた部分の面積は下図斜線部である。



よって、斜線部の面積は

$$\int_p^q \left(-x+4-\frac{1}{x}\right) dx = \left[-\frac{x^2}{2}+4x-\log|x|\right]_p^q$$

$$= -\frac{1}{2}(p^2-q^2)+4(p-q)-\log q+\log p$$

$$= -\frac{1}{2}(p-q)(p+q)+4(p-q)-\log \frac{q}{p}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}+4\cdot 2\sqrt{3}-\log(2+\sqrt{3})^2$$

$$= 4\sqrt{3}-2\log(2+\sqrt{3})$$

となる。また、 $\overline{RP}=\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}, \sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$ 、 $\overline{RQ}=\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}, \sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$ より $\triangle PQR$ の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)^2\right|=\frac{1}{2}\left|\left(3-2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)-\left(3+2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}|-6\sqrt{3}|$$

$$=3\sqrt{3}$$

となる。

〔4〕

〔解答〕

(1)

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1), \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2) \text{ より}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 1$$

である。また、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{3 \cdot 5 - 1^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{14} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5}, \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1, \quad \triangle ABC \text{ の面積: } \frac{1}{2} \sqrt{14}$$

(2)

点 P は線分 AB を $t:1-t$ に、点 Q は線分 CD を $s:1-s$ に内分するので、それぞれ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &= (1, 1, 0) + t(1, -1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{CD} \\ &= (0, 1, 2) + s(0, -2, -2) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= (-1, 0, 2) - t(1, -1, 1) + s(0, -2, -2) \\ &= (-t-1, t-2s, -t-2s+2) \end{aligned}$$

となる。 $|\overrightarrow{PQ}| > 0$ より $|\overrightarrow{PQ}|$ が最小のとき $|\overrightarrow{PQ}|^2$ も最小となる。よって、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= (-t-1)^2 + (t-2s)^2 + (-t-2s+2)^2 \\ &= 3t^2 - 2t + 8s^2 - 8s + 5 \\ &= 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 8\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

より $(s, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ で $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は最小値 $\frac{8}{3}$ をとる。したがって、 $(s, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ で $|\overrightarrow{PQ}|$ は最小値

$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PQ} = (-t-1, t-2s, -t-2s+2), \quad |\overrightarrow{PQ}| \text{ の最小値: } \frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad (s, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

(3)

点 H は平面 ABC 上より実数 a, b を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DH} &= \overrightarrow{DA} + a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} \\ &= (1, 2, 0) + a(1, -1, 1) + b(-1, 0, 2) \\ &= (a-b+1, -a+2, a+2b) \end{aligned}$$

と表される。 $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ が成立するので

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (a-b+1) \cdot 1 + (-a+2) \cdot (-1) + (a+2b) \cdot 1 = 0 \\ (a-b+1) \cdot (-1) + (-a+2) \cdot 0 + (a+2b) \cdot 2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 3a+b=1 \\ a+5b=1 \end{cases} \\ \therefore &(a, b) = \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right) \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DH} \\ &= (0, -1, 0) + \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{7} + 1, -\frac{2}{7} + 2, \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7}\right) \\ &= \left(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad H\left(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right)$$