

【1】

【解答】

	ア	イ	ウ	
(1)	$\frac{4a^2}{3}+2a-6$	$\frac{3}{2}$	3	
	エ	オ	カ	キ
(2)	$\frac{1}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{7}{120}$

【解説】

(1)

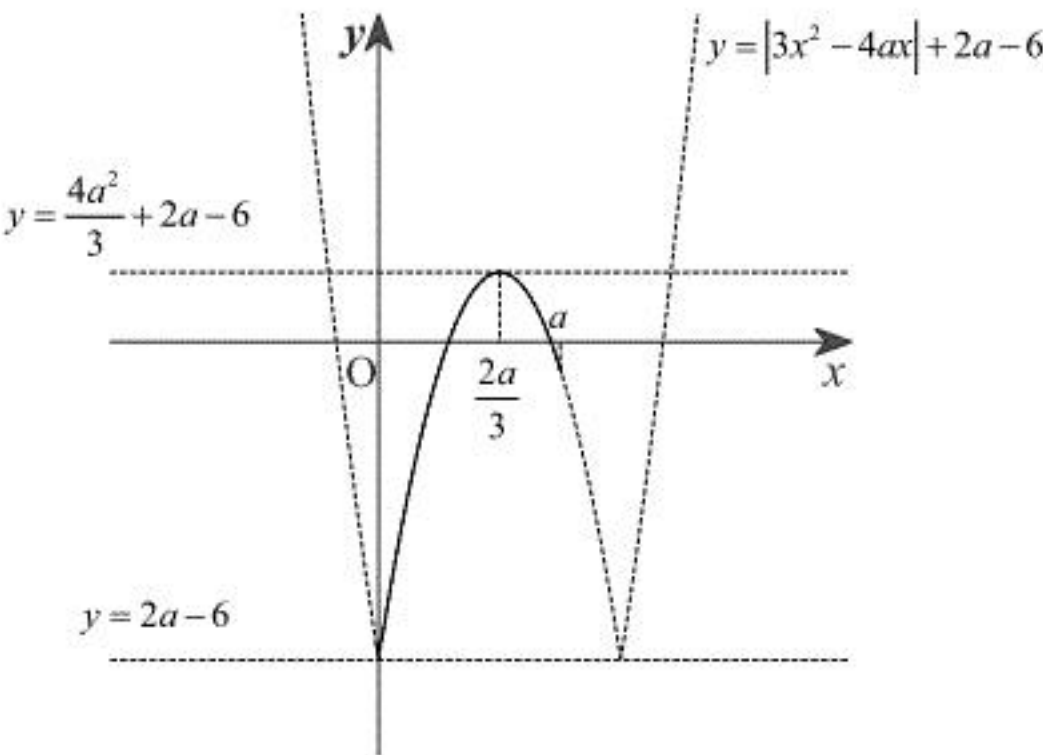
$$0 < x < a \text{ において,}$$

$$3x^2 - 4ax = x(3x - 4a) < 0 \text{ (}\because a > 0\text{)}$$

であるから,

$$\begin{aligned} y &= |3x^2 - 4ax| + 2a - 6 \\ &= -3x^2 + 4ax + 2a - 6 \\ &= -3\left(x - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{4a^2}{3} + 2a - 6 \end{aligned}$$

より, $0 < x < a$ における最大値は $x = \frac{2a}{3}$ のとき, $y = \frac{4a^2}{3} + 2a - 6$ と求まる。与えられた関数のグラフは以下のようになる。



上図より, 関数 $y = |3x^2 - 4ax| + 2a - 6$ が x 軸と 3 個共有点を持つとき, 直線 $y = \frac{4a^2}{3} + 2a - 6$ と x 軸が一致することから,

$$\begin{aligned} \frac{4a^2}{3} + 2a - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2 + 6a - 18 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\left(a - \frac{3}{2}\right)(a + 3) &= 0 \\ \therefore a &= \frac{3}{2} \text{ (}\because a > 0\text{)} \end{aligned}$$

が成立する。また上図より関数 $y = |3x^2 - 4ax| + 2a - 6$ が x 軸と 4 個共有点を持つとき,

$$\begin{aligned} 2a - 6 < 0 < \frac{4a^2}{3} + 2a - 6 \text{ が成立することから,} \\ 2a - 6 < 0 \\ \Leftrightarrow a < 3 \end{aligned}$$

と求まり, さらに

$$\begin{aligned} 0 < \frac{4a^2}{3} + 2a - 6 \\ \Leftrightarrow 4a^2 + 6a - 18 > 0 \\ \Leftrightarrow 4\left(a - \frac{3}{2}\right)(a + 3) > 0 \\ \Leftrightarrow a > \frac{3}{2} \text{ (}\because a > 0\text{)} \end{aligned}$$

が成立することから a の取りうる範囲は $\frac{3}{2} < a < 3$ と求まる。

(2)

カードを取る確率は同様に確からしい。3 枚のカードの組み合わせは $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$ 通り存在する。そのうち, 3 枚のカードが連続した数字であるものは $\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \dots, \{10, 11, 12\}$ の 10 通りである。したがって, 記録した 3 つの数が 3 つの連続した数である確率は,

$$\frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

となる。2 枚のカードのみが連続した数字である場合は以下の 2 通りに場合分けできる。

[1] 数字が小さい 2 枚のカードが連続しているとき

$n, n+1$ のカードが連続していると仮定すると, 数字が最大のカードの数字を m とおけば, $m = n+2$ であると 3 枚のカードが連続した数字となるから,

$$m \geq n+3$$

が必要とわかる。最大のカードの数字が 12 であることから, $n \leq 9$ が必要であり, m の値は $12 - (n+2)$ 通り存在することがわかる。これを $1 \leq n \leq 9$ について足し合わせると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^9 \{12 - (n+2)\} &= \sum_{n=1}^9 (10 - n) \\ &= 90 - \sum_{n=1}^9 n \\ &= 90 - \frac{10 \cdot 9}{2} \\ &= 45 \end{aligned}$$

が成立し, よって 45 通りの組み合わせが存在する。

[2] 数字が大きい 2 枚のカードが連続しているとき

大小関係の対称性より, [1] と同様に 45 通りの組み合わせが存在する。

以上 [1], [2] より,

$$45 + 45 = 90$$

より 90 通りの組み合わせが存在する。したがって, 3 つの数のうち 2 つの数だけが連続している確率は,

$$\frac{90}{220} = \frac{9}{22}$$

となる。余事象をとって, どの 2 枚も連続していない組み合わせは,

$$220 - 10 - 90 = 120$$

より 120 通りの組み合わせが存在する。したがって, どの 2 枚も連続していない確率は,

$$\frac{120}{220} = \frac{6}{11}$$

と求まる。カードの中で素数は 2, 3, 5, 7, 11 の 5 枚が存在し, その中から 3 枚のカードを選ぶ

組み合わせは $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ 通り存在する。そのうち $\{2, 3, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 3, 11\}$ の組み合わせのみが連続したカードの組を持つから, どの 2 枚も連続していない 120 通りの組み合わせの中

で $10 - 3 = 7$ 通りの組み合わせが素数のみによって構成され, 求める条件付き確率は, $\frac{7}{120}$ と求まる。

〔2〕

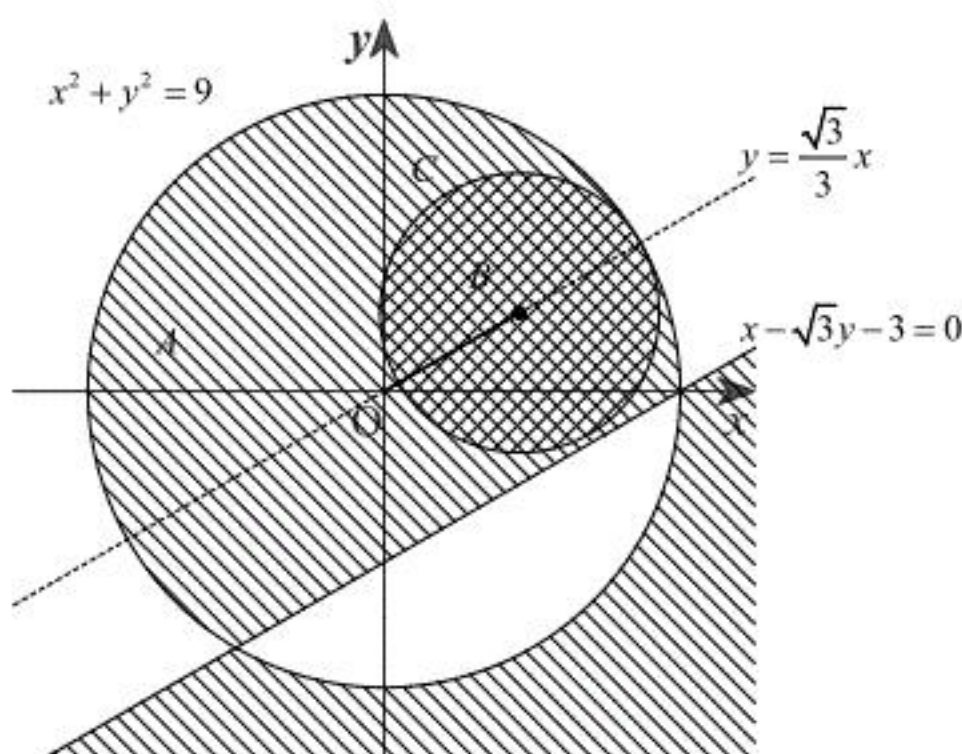
〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ
(1)	$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$
	オ	カ	キ	
(2)	-3	$\frac{5-3n}{2}$	$\frac{6}{(5-3n)(8-3n)}$	

〔解説〕

(1)

問題の図は以下のようになる。



円 C の方程式は,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}ax - 2ay + 4a^2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - \sqrt{3}a)^2 + (y - a)^2 &= 2 \end{aligned}$$

と変形できるから, 中心 $(\sqrt{3}a, a)$ の軌跡は $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ と求まる。点と直線の距離の公式より,

原点と直線 $x - \sqrt{3}y - 3 = 0$ の距離は,

$$\frac{|1 \cdot 0 - \sqrt{3} \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{3}{2}$$

と求まる。原点は直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上にあり, 直線 $x - \sqrt{3}y - 3 = 0$ は直線の $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ と平行であ

ることから, C の中心 $(\sqrt{3}a, a)$ と直線 $x - \sqrt{3}y - 3 = 0$ の距離は $\frac{3}{2}$ で a の値によらず一定であ

る。そして C の半径は $\sqrt{2} \left(< \frac{3}{2} \right)$ であるから, C と直線 $x - \sqrt{3}y - 3 = 0$ は交わらない。よって,

領域 A, B をそれぞれ図示すると上図の斜線部のようなになる。すなわち $A \cap B = B$ は円 C が円 $x^2 + y^2 = 9$ に内包されることと同値である。2つの円の中心間距離は

$$\sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + a^2} = 2|a|$$

と求まるので, 半径が $\sqrt{2}$ の円 C が半径が3の円 $x^2 + y^2 = 9$ に内包されるとき,

$$2|a| + \sqrt{2} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3 + \sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$$

が成立する。これがとりうる a の範囲と求まる。

(2)

$n \geq 2$ のとき,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

より,

$$\begin{aligned} (S_n - S_{n-1})(3S_n + 2) &= 3S_n^2 \\ \Leftrightarrow 2S_n - 3S_nS_{n-1} - 2S_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

が成立する。ここで, ある自然数 $n (\geq 2)$ で $S_n = 0$ と仮定すると, 漸化式より $S_{n-1} = 0$ が成り立ち, 帰納的に $S_1 = 0$ となる。これは $S_1 = a_1 = 1$ に矛盾する。よって任意の自然数 n に対して $S_n \neq 0$ である。したがって両辺 S_nS_{n-1} で割ると,

$$\begin{aligned} \frac{2}{S_{n-1}} - 3 - \frac{2}{S_n} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2T_{n-1} - 3 &= 2T_n \\ \Leftrightarrow T_n &= T_{n-1} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

と求まる。 $T_1 = \frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = 1$ であるから, 数列 $\{T_n\}$ は初項1, 公差 $-\frac{3}{2}$ の等差数列である。したが

って, 一般項は $T_n = \frac{5-3n}{2}$ である。よって, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{n-1}} \\ &= \frac{2}{5-3n} - \frac{2}{8-3n} \\ &= \frac{6}{(5-3n)(8-3n)} \end{aligned}$$

と求まる。特に $a_2 = -3$ である。

【3】

〔解答〕

(1)

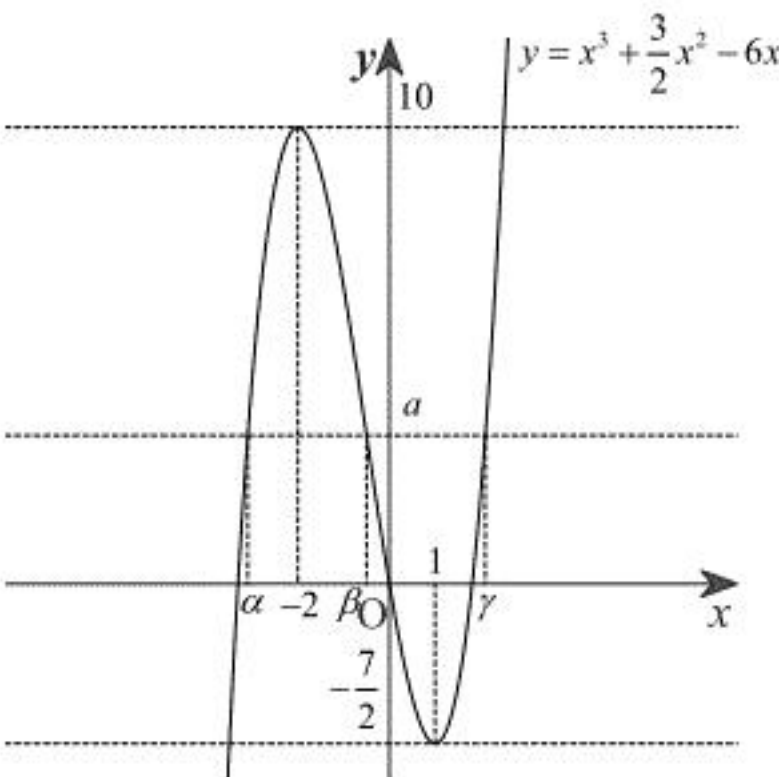
導関数は、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 3x - 6 \\ &= 3(x-1)(x+2) \end{aligned}$$

と表すことができるから、増減表は以下のようになる。

x	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	10	↘	$-\frac{7}{2}$	↗

これを図示すると以下のようになる。



よって極大値は、 10 ($x=-2$)、極小値は、 $-\frac{7}{2}$ ($x=1$) である。

(答) 極大値 10 ($x=-2$)、極小値 $-\frac{7}{2}$ ($x=1$)

(2)

$y=a$ が $y=f(x)$ と交点を 3 つ持つとき、 $f(x)=a$ は相異なる 3 つの実数解を持つ。上図及び

増減表より、このとき a は $-\frac{7}{2} < a < 10$ を満たす。

(答) $-\frac{7}{2} < a < 10$

(3)

方程式 $f(x)=a$ を変形した 3 次方程式 $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - a = 0$ について、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -6 \quad \dots \textcircled{2}$$

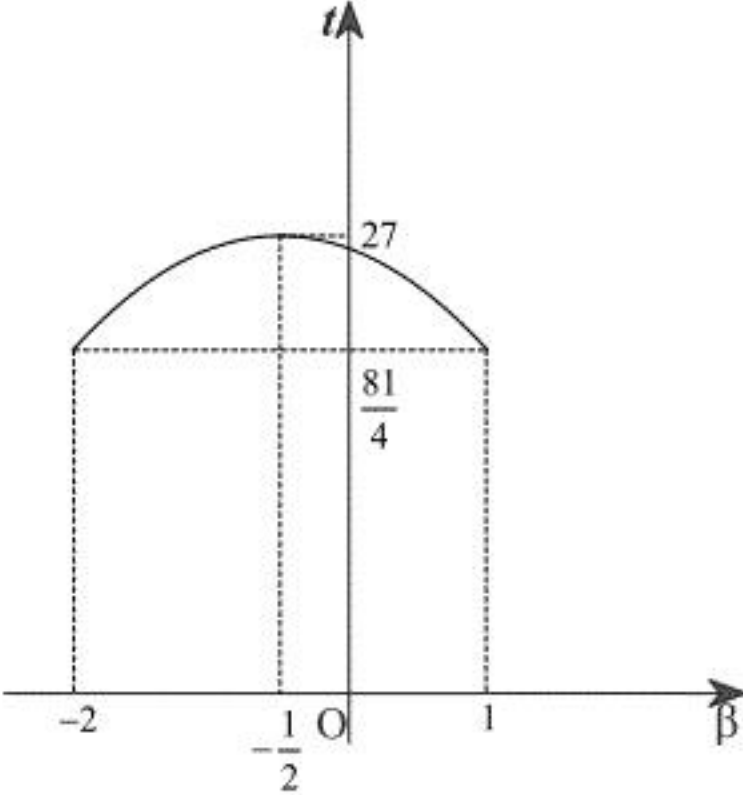
が成立する。①、②を用いると、

$$\begin{aligned} t &= (\alpha - \gamma)^2 \\ &= (\alpha + \gamma)^2 - 4\alpha\gamma \\ &= \left(-\frac{3}{2} - \beta\right)^2 - 4\{-6 - (a + \gamma)\beta\} \\ &= \left(-\frac{3}{2} - \beta\right)^2 - 4\left\{-6 - \left(-\frac{3}{2} - \beta\right)\beta\right\} \\ &= -3\beta^2 - 3\beta + \frac{105}{4} \\ &= -3\left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2 + 27 \end{aligned}$$

と表すことができる。上図より、 a が $-\frac{7}{2} < a < 10$ を満たすとき、 $y=a$ と $y=f(x)$ の交点は、

$x < -2$ 、 $-2 < x < 1$ 、 $1 < x$ の範囲にそれぞれ 1 つずつ存在する。よって、 $-2 < \beta < 1$ である。

$\beta-t$ 平面上の t のグラフは以下のようになる。



したがって、

$$\frac{81}{4} < t \leq 27$$

である。

(答) $t = -3\left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2 + 27, \frac{81}{4} < t \leq 27$