

【1】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	
(2)	エ	オ	カ	キ
	t^2-3t	$-\frac{9}{4}$	10	$\frac{11}{6}\pi$
(3)	ク	ケ	コ	
	3	$2\sqrt{5}$	1	

〔解説〕

(1)

X, Y の出方は、全部で 36 通りある。その中で $X=Y$ となるのは、6 通りある。よって、 X, Y の出方は同様に確からしいので、 $X=Y$ となる確率は、

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

である。また、 $X<Y$ となるのは、6 つの目から異なる 2 つの目を選ぶ組み合わせの数に等しく、 ${}_6C_2=15$ (通り) がある。よって、 $X<Y$ となる確率は、

$$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

である。積 XY が奇数になるのは、 X, Y がともに奇数のときである。よって、積 XY が奇数になる確率は、

$$\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} y &= \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin x + 3\sqrt{3} \cos x \\ &= (\sin x - \sqrt{3} \cos x)^2 - 3(\sin x - \sqrt{3} \cos x) \\ &= t^2 - 3t \\ &= \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} t &= \sin x - \sqrt{3} \cos x \\ &= 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

であり、 $0 \leq x \leq 2\pi$ より $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{3}\pi$ であることから、 $-2 \leq t \leq 2$ である。したがっ

て、関数 y は $t = \frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{9}{4}$ をとる。また、 $t = -2$ で最大値

$$\begin{aligned} y &= (-2)^2 - 3(-2) \\ &= 10 \end{aligned}$$

をとる。このとき、

$$\begin{aligned} t &= -2 \\ \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= -1 \\ \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} &= \frac{3}{2}\pi \left(\because -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{3}\pi\right) \\ \therefore x &= \frac{11}{6}\pi \end{aligned}$$

である。

(3)

両辺正より、 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ の両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned} \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 &= (\sqrt{5})^2 \\ \Leftrightarrow x + 2 + x^{-1} &= 5 \\ \therefore x + x^{-1} &= 3 \end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned} x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} &= \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)(x + x^{-1}) - \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \sqrt{5} \cdot 3 - \sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 &= x - 2 + x^{-1} = 1 \\ \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} &= 1, -1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x > 1$ より、 $\sqrt{x} > 1, 1 > \frac{1}{\sqrt{x}}$ であるから、 $\sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ となる。よって、

$x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} > 0$ である。以上より、 $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 1$ である。

〔2〕

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
$\frac{15}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{19}$	$\frac{15}{4}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$
カ	キ	ク	ケ	コ
$\frac{5}{6}\vec{a}$	$\frac{5}{9}\vec{b}$	$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$	$\frac{5}{4}\vec{b}$	$\frac{1}{6}\vec{a}+\vec{b}$

〔解説〕

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=7$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=7^2 \quad (\because \text{両辺正})$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=49$$

$$\Leftrightarrow 9+2\vec{a}\cdot\vec{b}+25=49 \quad \left(\because \left|\vec{a}\right|=3, \left|\vec{b}\right|=5\right)$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{15}{2}$$

であり、

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} \\ &= \frac{\frac{15}{2}}{3\cdot 5} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2 &= \left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2 \\ &= 25-2\cdot\frac{15}{2}+9 \\ &= 19\end{aligned}$$

$$\therefore \left|\vec{b}-\vec{a}\right|=\sqrt{19}$$

となるので、線分 AB の長さは $\sqrt{19}$ である。三角形 OAB の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta &= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{15}{4}\sqrt{3}\end{aligned}$$

である。G は、三角形 OAB の重心であるから、

$$\overrightarrow{\text{OG}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

である。C、D は、それぞれ線分 OA、OB 上にあるので、実数 s, t ($0\leq s\leq 1, 0\leq t\leq 1$) を用

いて、 $\overrightarrow{\text{OC}}=s\vec{a}, \overrightarrow{\text{OD}}=t\vec{b}$ とおける。CG:GD=3:2 より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OG}} &= \frac{2}{5}\overrightarrow{\text{OC}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\text{OD}} \\ &= \frac{2}{5}s\vec{a}+\frac{3}{5}t\vec{b}\end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから、 $\overrightarrow{\text{OG}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ と比較すると

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{5}s, \frac{1}{3}=\frac{3}{5}t \Leftrightarrow s=\frac{5}{6}, t=\frac{5}{9}$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{\text{OC}}=\frac{5}{6}\vec{a}, \overrightarrow{\text{OD}}=\frac{5}{9}\vec{b}$$

である。M は、線分 AB の中点であるから

$$\overrightarrow{\text{OM}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

である。E は、直線 OB 上にあることから、実数 k を用いて $\overrightarrow{\text{OE}}=k\vec{b}$ とおける。また、直線

CM 上にあることから、実数 l を用いて $\overrightarrow{\text{CE}}=l\overrightarrow{\text{CM}}$ とおける。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OE}} &= \overrightarrow{\text{OC}}+\overrightarrow{\text{CE}} \\ &= \overrightarrow{\text{OC}}+l\overrightarrow{\text{CM}} \\ &= \frac{5}{6}\vec{a}+l\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{5}{6}\vec{a}\right) \\ &= \left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}l\right)\vec{a}+\frac{1}{2}l\vec{b}\end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから、 $\overrightarrow{\text{OE}}=k\vec{b}$ と比較して

$$0=\frac{5}{6}-\frac{1}{3}l, k=\frac{1}{2}l \Leftrightarrow k=\frac{5}{4}, l=\frac{5}{2}$$

を得る。よって、

$$\overrightarrow{\text{OE}}=\frac{5}{4}\vec{b}$$

である。F は、直線 CM 上にあるので、実数 x を用いて、 $\overrightarrow{\text{CF}}=x\overrightarrow{\text{CM}}$ とおける。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OF}} &= \overrightarrow{\text{OC}}+\overrightarrow{\text{CF}} \\ &= \overrightarrow{\text{OC}}+x\overrightarrow{\text{CM}} \\ &= \frac{5}{6}\vec{a}+x\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right) \\ &= \left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}x\right)\vec{a}+\frac{1}{2}x\vec{b}\end{aligned}$$

となる。また、 $\text{OA}\perp\text{AF}$ であるから、 $\overrightarrow{\text{OA}}\cdot\overrightarrow{\text{AF}}=0$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OA}}\cdot\overrightarrow{\text{AF}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\left\{\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}x\right)\vec{a}+\frac{1}{2}x\vec{b}-\vec{a}\right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\left\{\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}x\right)\vec{a}+\frac{1}{2}x\vec{b}\right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}x\right)\left|\vec{a}\right|^2+\frac{1}{2}x\vec{a}\cdot\vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}x\right)\cdot 9+\frac{1}{2}x\cdot\frac{15}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2}-3x+\frac{15}{4}x &= 0 \\ \therefore x &= 2\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OF}} &= \left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\cdot 2\right)\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot 2\vec{b} \\ &= \frac{1}{6}\vec{a}+\vec{b}\end{aligned}$$

【3】

〔解答〕

(1)	$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{\text{イ}}$	
	10	15	
(2)	$\boxed{\text{ウ}}$	$\boxed{\text{エ}}$	
	$n+1$	$\frac{1}{2}n(n+1)$	
(3)	$\boxed{\text{オ}}$	$\boxed{\text{カ}}$	$\boxed{\text{キ}}$
	20000	45	10
(4)	$\boxed{\text{ク}}$		
	$\frac{1}{2}n(n^2+1)$		
(5)	$\boxed{\text{ケ}}$	$\boxed{\text{コ}}$	
	$\frac{2n}{n+1}$	2	

〔解説〕

(1)

第 n 群には、 n 個の数が含まれているので、

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + 4 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

である。

(2)

第 n 群には、 n 個の数が含まれているので、

$$a_{n+1} - a_n = n + 1$$

である。よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(n-1)n + (n-1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(3)

$$\begin{aligned} a_{199} &= \frac{1}{2} \cdot 199 \cdot 200 \\ &= 19900 \end{aligned}$$

であるので、第 200 群の 100 番目の数は、

$$19900 + 100 = 20000$$

となる。また、

$$\begin{aligned} a_{44} &= \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot 45 \\ &= 990 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{45} &= \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot 46 \\ &= 1035 \end{aligned}$$

であり、(2)より数列 $\{a_n\}$ は単調増加するので、1000 は第 45 群の 10 番目とわかる。

(4)

$n \geq 2$ のとき、第 n 群の 1 番目の数は、

$$a_{n-1} + 1 = \frac{1}{2}(n-1)n + 1$$

であり、第 n 群の最後の数は、

$$a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

である。よって、第 n 群にあるすべての数の和は、

$$\frac{1}{2}n \left[\left\{ \frac{1}{2}(n-1)n + 1 \right\} + \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\} \right] = \frac{1}{2}n(n^2 + 1)$$

である。これは $n=1$ のときも成り立つ。

(5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_k} &= \frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)} \\ &= \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \end{aligned}$$

と変形出来るので、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{2n}{n+1} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。

【4】

(1)

$$f'(x) = 2\cos 2x$$

であるので、点 $\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ における曲線 C_1 の接線の方程式は、

$$y - f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore y = -x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

となる。

$$(答) \quad y = -x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

(2)

$a=1$ のとき、曲線 C_1, C_2 の交点の x 座標は、

$$\sin 2x = \cos x$$

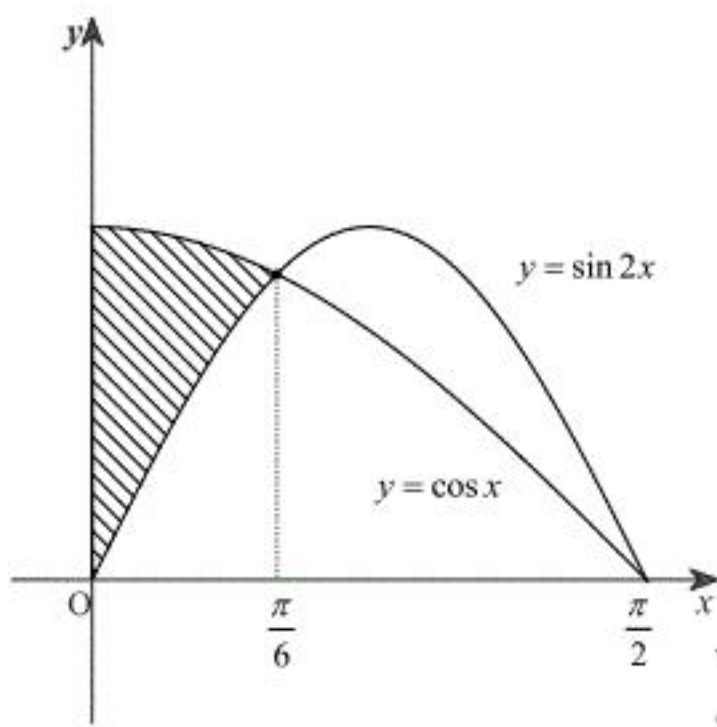
$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0, \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \quad (\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

である。よって、求める面積は次の図の斜線部分になる。



したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin 2x) dx &= \left[\sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \frac{1}{4}$$

(3)

$$\sin 2x = a \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x = a \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - a) = 0$$

であるので、曲線 C_1 と C_2 が異なる2個の共有点をもつのは、 $2\sin x - a = 0$ が解をもち、その解が $\cos x = 0$ の解である $x = \frac{\pi}{2}$ でないときである。つまり、 $2\sin x - a = 0$ が、 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ で解

をもてばよい。 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、 $0 \leq \sin x < 1$ であるので、曲線 C_1 と C_2 が異なる2個の共有点をもつとき、

$$0 \leq \frac{a}{2} < 1$$

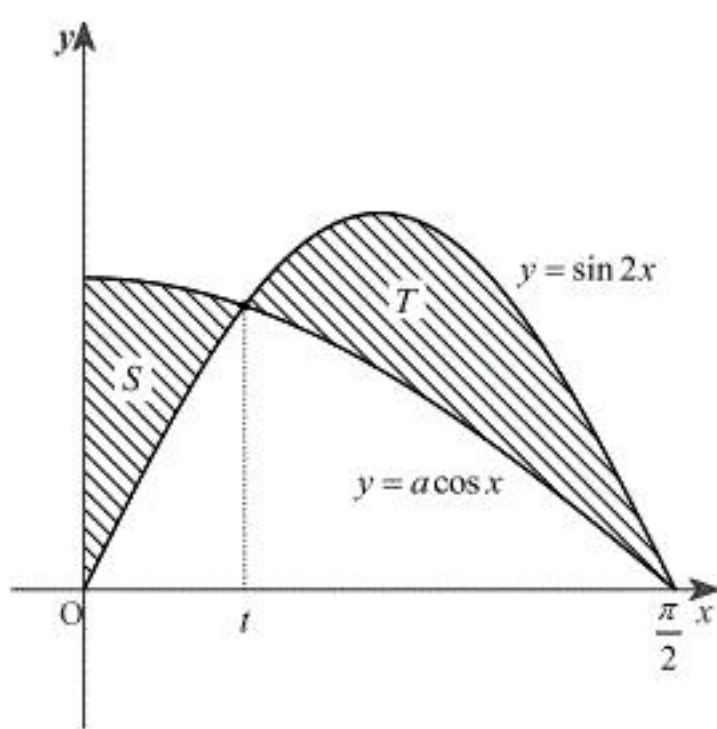
$$\therefore 0 \leq a < 2$$

である。また、点Qの x 座標を t とするとき、 $\sin t = \frac{a}{2}$ である。

$$(答) \quad 0 \leq a < 2, \sin t = \frac{a}{2}$$

(4)

(3)より、 C_1, C_2 を図示すると下図のようになる。



上図より、面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t (a \cos x - \sin 2x) dx \\ &= \left[a \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^t \\ &= \left(a \sin t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) - \frac{1}{2} \\ &= a \sin t + \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 t) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

である。また、面積 T は、

$$\begin{aligned} T &= \int_t^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - a \cos x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - a \sin x \right]_t^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} - a \right) - \left(-\frac{1}{2} \cos 2t - a \sin t \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - a \right) - \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{2} \right) - \frac{a^2}{2} \right\} \\ &= \frac{a^2}{4} - a + 1 \end{aligned}$$

である。したがって、 $2S = T$ となるとき、

$$\begin{aligned} 2S &= T \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{a^2}{4} &= \frac{a^2}{4} - a + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + a - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 4a - 4 &= 0 \\ \therefore a &= -2 + 2\sqrt{2} \quad (\because 0 \leq a < 2) \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad S = \frac{a^2}{4}, T = \frac{a^2}{4} - a + 1, a = -2 + 2\sqrt{2}$$