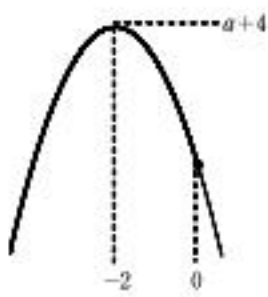


[1]

(1)(i) $x \leq 0$ のとき

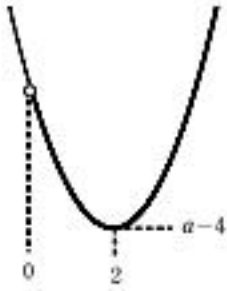
$$\begin{aligned} f(x) &= x(-x-4)+a \\ &= -x^2-4x+a \\ &= -(x+2)^2+a+4 \end{aligned}$$

より、 $x=\boxed{-2}$ のとき最大値 $x=\boxed{a+4}$ をとる。



(ii) $x > 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x-4)+a \\ &= x^2-4x+a \\ &= (x-2)^2+a-4 \end{aligned}$$



これと(i)より、 $y=f(x)$ のグラフは次のようになる。
したがって、 $f(x)=0$ が異なる 3 実解をもつとき、

$$\begin{aligned} a-4 &< 0 < a+4 \\ \therefore \quad \boxed{-4 < a < 4} \end{aligned}$$

このとき、 $f(x)=0$ の 3 実解を α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$) とする。
 $a=0$ のとき、図の対称性より、 $\alpha+\beta+\gamma=0$
よって、 $\alpha+\beta+\gamma < 0$ となるのは $a > 0$ のとき。

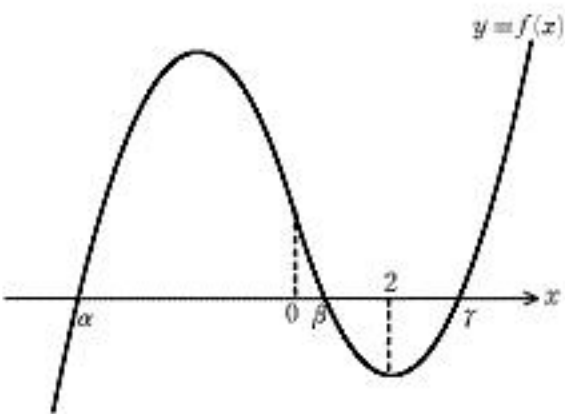
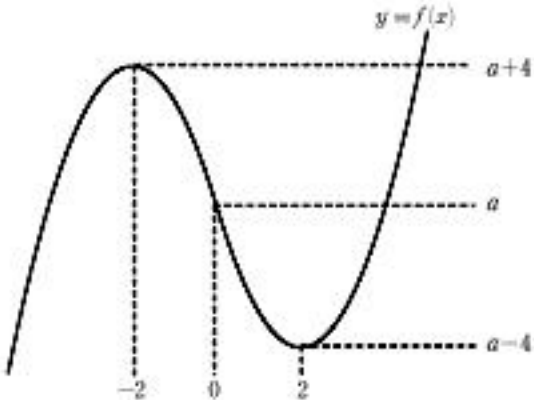
このとき、 $\frac{\beta+\gamma}{2}=2$ すなわち、 $\beta+\gamma=4$ であるから、

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{2}$ のとき、

$$\alpha=-\frac{9}{2}$$

ゆえに、 $f\left(-\frac{9}{2}\right)=0$ より、

$$\begin{aligned} -\left(-\frac{9}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)+a &= 0 \\ a &= \boxed{\frac{9}{4}} \end{aligned}$$



(2)

(i)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

(ii) 袋 A から赤色の 2 枚を取り出す場合と、
袋 B から赤色の 2 枚を取り出す場合があるから、

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \boxed{\frac{7}{20}}$$

(iii) (i), (ii)より、

$$\frac{1}{\frac{5}{7}} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

[2]

(1)

(i) ①の左辺を $f(x)$ とすると、

$$f(-1)=0$$

より、①は、 $x=\boxed{-1}$ を解にもつ、

(ii) (i)より、①は、

$$(x+1)\{x^2+(-2a-2)x-a+5\}=0$$

とできるから、①が異なる3つの負の解をもつための条件は、

x の2次方程式

$$x^2+(-2a-2)x-a+5=0 \quad \dots\dots ②$$

が-1以外の異なる2つの負の解をもつことである、

よって、②の左辺を $g(x)$ とすると、

$$g(x)=\{x-(a+1)\}^2-a^2-3a+4$$

であるから、求める条件は、

$$\begin{cases} g(-1)\neq 0 & \dots\dots ③ \\ g(0)>0 & \dots\dots ④ \\ a+1<0 & \dots\dots ⑤ \\ -a^2-3a+4<0 & \dots\dots ⑥ \end{cases}$$

③より、

$$1+(2a+2)-a+5\neq 0 \quad \therefore a\neq -8$$

④より、

$$-a+5>0 \quad \therefore a<5$$

⑤より、

$$a<-1$$

⑥より、

$$(a+4)(a-1)>0$$

$$a<-4, 1<a$$

以上から、求める a の値の範囲は、

$$a<\boxed{-8}, -8<a<\boxed{-4}$$

(iii) $x^3-1=0$ より、

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

よって、 $x^2+x+1=0$ の2解が $\omega, \bar{\omega}$ であるから、解と係数の関係より、

$$\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1 \quad \dots\dots ⑦$$

一方、方程式①が $x=\omega+k$ を解にもつとき、

②の2解が $\omega+k, \overline{\omega+k}(\equiv\bar{\omega}+k)$ となるから、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} (\omega+k)+(\bar{\omega}+k)=2a+2 \\ (\omega+k)(\bar{\omega}+k)=-a+5 \end{cases}$$

ゆえに、⑦より、

$$\begin{cases} -1+2k=2a+2 & \dots\dots ⑧ \\ 1-k+k^2=-a+5 & \dots\dots ⑨ \end{cases}$$

⑧+⑨ $\times 2$ より、

$$1+2k^2=12$$

$k>0$ より、

$$k=\sqrt{\frac{11}{2}}=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

したがって、⑧より、

$$a=k-\frac{3}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{22}-3}{2}}$$

(2) $\{a_n\}$ の初項を a 、公差を d とすると、条件より、

$$\begin{cases} a+(a+d)=7 \\ a+(a+2d)+(a+4d)=24 \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} 2a+d=7 \\ 3a+6d=24 \end{cases}$$

よって、 $a=2, d=3$ であるから、

$$a_n=2+(n-1)\cdot 3=\boxed{3n-1} \quad (n=1, 2, \dots\dots)$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{3k+2}+\sqrt{3k-1}} \times \frac{\sqrt{3k+2}-\sqrt{3k-1}}{\sqrt{3k+2}-\sqrt{3k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3}(\sqrt{3k+2}-\sqrt{3k-1}) \\ &= \frac{1}{3}\{(\sqrt{5}+\sqrt{8}+\dots\dots+\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2})-(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\dots\dots+\sqrt{3n-1})\} \\ &= \boxed{\frac{1}{3}(\sqrt{3n+2}-\sqrt{2})} \end{aligned}$$

また、 $\{b_n\}$ の初項を b 、公比を r とすると、条件より、

$$b+br+br^2=7 \quad \dots\dots ①$$

$$b+br+br^2+br^3+br^4+br^5=63 \quad \dots\dots ②$$

②より、

$$(b+br+br^2)+r^3(b+br+br^2)=63$$

であるから、①より、

$$7+7r^3=63$$

$$r^3=8$$

r は実数より、

$$r=2$$

よって、①より、 $b=1$ であるから、

$$b_n=2^{n-1} \quad (n=1, 2, \dots\dots)$$

ゆえに、 $\sum_{k=1}^n a_k b_k=S$ とすると、

$$S=2\cdot 2^0+5\cdot 2^1+8\cdot 2^2+\dots\dots+(3n-1)\cdot 2^{n-1} \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore 2S=2\cdot 2^1+5\cdot 2^2+\dots\dots+(3n-4)\cdot 2^{n-1}+(3n-1)\cdot 2^n \quad \dots\dots ④$$

③-④より、

$$\begin{aligned} -S &= 2\cdot 2^0+3\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\dots\dots+3\cdot 2^{n-1}-(3n-1)\cdot 2^n \\ &= 2+\frac{6(2^{n-1}-1)}{2-1}-(3n-1)\cdot 2^n \\ &= -(3n-4)\cdot 2^n-4 \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k=S=\boxed{(3n-4)\cdot 2^n+4}$$

[3]

(1) $\int_0^2 g(t) dt = k \dots\dots\dots \textcircled{1}$ (k は定数) とすると,

$$\begin{aligned} g(x) &= x \left(3x - \frac{1}{2}k \right) \\ &= 3x^2 - \frac{1}{2}kx \end{aligned} \qquad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

よって, $\textcircled{1}$ より,

$$\begin{aligned} k &= \int_0^2 \left(3t^2 - \frac{1}{2}kt \right) dt \\ &= \left[t^3 - \frac{1}{4}kt^2 \right]_0^2 \\ &= 8 - k \end{aligned}$$

したがって, $k = 8 - k$ より,

$$\int_0^2 g(t) dt = k = 4 \qquad \dots\dots\dots (\text{答})$$

(2) $\textcircled{2}$ より,

$$g(x) = 3x^2 - 2x$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^x g(t) dt &= \left[t^3 - t^2 \right]_0^x \\ &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} f(x) - h(x) &= (x^3 - 3x^2 + ax) - (x^3 - x^2) \\ &= -2x^2 + ax \\ &= -2x \left(x - \frac{a}{2} \right) \end{aligned}$$

したがって, $f(x) = h(x)$ の解は,

$$x = 0, \frac{a}{2}$$

であり,

$$0 < x < \frac{a}{2} \text{ において, } f(x) - h(x) > 0$$

$$x \geq \frac{a}{2} \text{ において, } f(x) - h(x) \leq 0$$

よって,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{a}{2}} (f(x) - h(x)) dx + \int_{\frac{a}{2}}^2 (h(x) - f(x)) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^{\frac{a}{2}} - \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_{\frac{a}{2}}^2 \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{a}{2} \right)^3 + \frac{a}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] - \left(-\frac{2}{3} \cdot 2^3 + \frac{a}{2} \cdot 2^2 \right) \\ &= \frac{1}{12}a^3 - 2a + \frac{16}{3} \end{aligned} \qquad \dots\dots\dots (\text{答})$$

(3) (2)より,

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{4}a^2 - 2 \\ &= \frac{1}{4}(a + 2\sqrt{2})(a - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

であるから, $0 < a < 4$ における S の増減は次のようになる.

a	0	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$	4
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって, S の最小値は,

$$\frac{1}{12}(2\sqrt{2})^3 - 2 \cdot 2\sqrt{2} + \frac{16}{3} = \frac{16 - 8\sqrt{2}}{3} \qquad \dots\dots\dots (\text{答})$$

であり, そのときの a の値は,

$$a = 2\sqrt{2} \qquad \dots\dots\dots (\text{答})$$