

$$(1) \left| \overline{a} + \overline{b} \right|^2 = (\sqrt{17})^2 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{10})^2 + 2\overline{a} \cdot \overline{b} + \left| \overline{b} \right|^2 &= 17 \\ 2\overline{a} \cdot \overline{b} + \left| \overline{b} \right|^2 &= 7 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\left| \overline{a} - 2\overline{b} \right|^2 = (\sqrt{26})^2 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{10})^2 - 4\overline{a} \cdot \overline{b} + 4\left| \overline{b} \right|^2 &= 26 \\ \overline{a} \cdot \overline{b} - \left| \overline{b} \right|^2 &= -4 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ②より,

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \boxed{1}_{\times}, \left| \overline{b} \right| = \boxed{\sqrt{5}}_{\times}$$

よって,

$$\begin{aligned} \left| \overline{a} + t\overline{b} \right|^2 &= (\sqrt{10})^2 + 2t\overline{a} \cdot \overline{b} + t^2(\sqrt{5})^2 \\ &= \boxed{5t^2 + 2t + 10}_{\times} \\ &= 5\left(t + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{49}{5} \end{aligned}$$

より,

$$\left| \overline{a} + t\overline{b} \right| \text{ の最小値は } \sqrt{\frac{49}{5}} = \sqrt{9.8}$$

ゆえに, この値に最も近い整数は, $\boxed{3}_{\times}$

$$(2) 2022 = 2 \times 3 \times 337 \text{ より,}$$

2022 の正の約数のうち 3 桁のものの和は,

$$337 + 2 \cdot 337 = \boxed{1011}_{\times}$$

$$(3) \text{ 真数条件より,}$$

$$\begin{aligned} x+4 > 0 \quad \text{かつ} \quad x-2 > 0 \quad \text{かつ} \quad 7x-2 > 0 \\ \therefore x > 2 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

このもとで, 与えられた不等式, つまり,

$$\log_a(x+4)(x-2) > \log_a(7x-2)$$

の解は,

(i) $a > 1$ のとき

$$\begin{aligned} (x+4)(x-2) &> 7x-2 \\ x^2-5x-6 &> 0 \\ (x-6)(x+1) &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{③より, } \boxed{x > 6}_{\times}$$

(ii) $0 < a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} (x+4)(x-2) &< 7x-2 \\ (x-6)(x+1) &< 0 \end{aligned}$$

$$\text{③より, } \boxed{2 < x < 6}_{\times}$$

$$(4)$$

$$\begin{aligned} (1+i)^6 &= \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^6 \\ &= 8 \left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right) \\ &= \boxed{-8i}_{\times} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{別}} \quad (1+i)^6 = \left\{ (1+i)^2 \right\}^3 = (2i)^3 = -8i$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{3}+i} \right)^6 &= \left\{ 2^{-1} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) \right\}^6 \\ &= \frac{1}{64} (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) \\ &= \boxed{-\frac{1}{64}}_{\times} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{別}} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}+i} \right)^6 = \left\{ \frac{1}{(\sqrt{3}+i)^3} \right\}^2 = \left(\frac{1}{8i} \right)^2 = -\frac{1}{64}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i} \right)^{12} &= \left\{ \frac{\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)}{2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)} \right\}^{12} \\ &= \frac{1}{64} \cdot \frac{\cos(-3\pi) + i \sin(-3\pi)}{\cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi)} \\ &= \boxed{-\frac{1}{64}}_{\times} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{別}} \quad \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i} \right)^{12} &= \left\{ \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i} \right)^2 \right\}^6 \\ &= \left(\frac{-i}{1-\sqrt{3}i} \right)^6 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}+i} \right)^6 \\ &= -\frac{1}{64} \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot 2 \\ &= \boxed{2n-1} \end{aligned}$$

数列 $\{a_{2k-1}\}$ は公差 4 の等差数列であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} a_{2k-1} &= \frac{1}{2} \cdot 100(a_1 + a_{199}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 100(1 + 397) \\ &= \boxed{19900} \end{aligned}$$

(2) $b_{n+1} = 2b_n + 1$ より,

$$\begin{aligned} b_{n+1} + 1 &= 2(b_n + 1) \\ \therefore b_n + 1 &= (b_1 + 1) \cdot 2^{n-1} \\ b_n &= \boxed{2^n - 1} \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n (2^k - 1) \\ &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n \\ &= \boxed{2^{n+1} - n - 2} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) - \left(\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \boxed{\frac{n}{2n+1}} \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

より, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ は収束し, その値は, $\boxed{\frac{1}{2}}$

また,

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) &= \sqrt{n}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \\ &= \frac{\boxed{2\sqrt{n}}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} \end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(4) $S_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$ とおくと,

$$S_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n \quad \dots\dots ①$$

$$\therefore 2S_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1} \quad \dots\dots ②$$

① - ② より,

$$\begin{aligned} -S_n &= 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + \dots + 1 \cdot 2^n - n \cdot 2^{n+1} \\ &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k = S_n = \boxed{(n-1)2^{n+1} + 2}$$

よって,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (2k-1)(2^k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n (2k \cdot 2^k - 2k - 2^k + 1) \\ &= 2\{(n-1)2^{n+1} + 2\} - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} + n \\ &= \boxed{(2n-3)2^{n+1} - n^2 + 6} \end{aligned}$$

(1)

・ $a_1 = b_1 = c_1 = d_1$ である場合は、その値が 1 から 4 までの $\boxed{4}$ 通り。

・ a_1, b_1, c_1, d_1 がすべて異なる場合は、1 から 4 までが 1 つずつある場合だから、

$$4! = \boxed{24} \text{ 通り}$$

・ $a_1 < b_1 < c_1 = d_1$ となる場合は、4 つの数から 3 つを選べばよいから、

$${}_4C_3 = \boxed{4} \text{ 通り}$$

・ $a_1 = b_1 < c_1 = d_1$ となる場合は、4 つの数から 2 つを選べばよいから、

$${}_4C_2 = \boxed{6} \text{ 通り}$$

(2)

・ a_1, b_1, c_1, d_1 がすべて 2 以下である場合は、

$$2^4 = \boxed{16} \text{ 通り}$$

・ a_1, b_1, c_1, d_1 の中で最大の数が 4 である場合は、少なくとも 1 つが 4 であればよいから、

$$4^4 - 3^4 = \boxed{175} \text{ 通り}$$

(3) $s_1 = 4$ となるのは、 $a_1 = 4, b_1 \neq 4, c_1 \neq 4, d_1 \neq 4$ の場合であるから、

その確率は、

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \boxed{\frac{27}{256}} \text{ 通り}$$

同様にして、 $s_1 = 1, 2, 3$ となる確率はそれぞれ $\frac{27}{256}$

s_1 の値は 0, 1, 2, 3, 4 のいずれかであるから、 $s_1 = 0$ となる確率は、

$$1 - \frac{27}{256} \times 4 = \boxed{\frac{37}{64}} \text{ 通り}$$

$s_1 > 0, s_2 > 0, s_1 + s_2 \geq 4$ となる組 (s_1, s_2) は、

$$(1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4), \\ (3, 1), (4, 1), \quad (3, 2), (4, 2) \quad (4, 3)$$

の $\boxed{13}$ 個あるから、

$$p = \left(\frac{27}{256} \right)^2 \times 13 = \frac{\boxed{9477}}{65536}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 \int x \cos x dx &= \int x(\sin x)' dx \\
 &= x \sin x - \int \sin x dx \\
 &= x \sin x + \cos x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x (t-x) \cos t dt + 1 \\
 &= \int_0^x t \cos t dt - x \int_0^x \cos t dt + 1 \\
 &= [t \sin t + \cos t]_0^x - x[\sin t]_0^x + 1 \\
 &= \cos x \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(t) \cos t dt = k \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad (k \text{ は定数})$ とおくと,

$$g(x) = \sin x + 3k - \frac{3}{8}$$

よって, ①より,

$$\begin{aligned}
 k &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin t + 3k - \frac{3}{8} \right) \cos t dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2t + \left(3k - \frac{3}{8} \right) \cos t \right\} dt \\
 &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2t + \left(3k - \frac{3}{8} \right) \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \left(3k - \frac{3}{8} \right) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2}k - \frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

したがって, $k = \frac{3}{2}k - \frac{1}{16}$ より,

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(t) \cos t dt = k = \frac{1}{8} \quad \dots\dots(\text{答})$$

ゆえに,

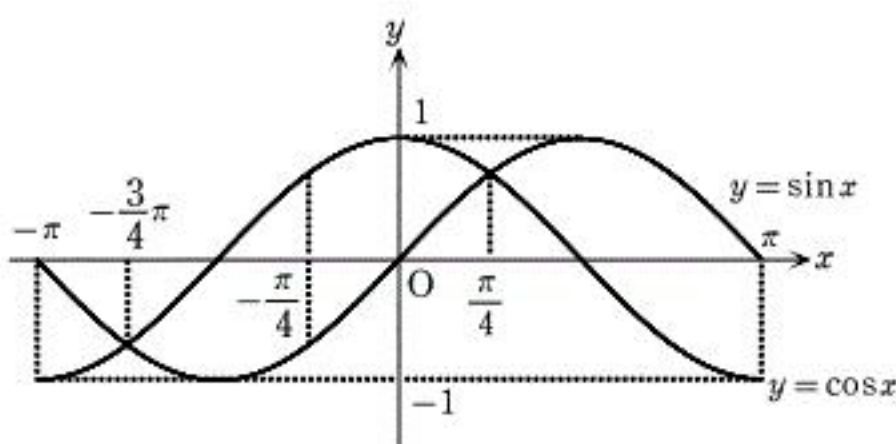
$$g(x) = \sin x \quad \dots\dots(\text{答})$$

(4) $-\pi \leq x \leq \pi$ において, $f(x) = g(x)$ を解くと,

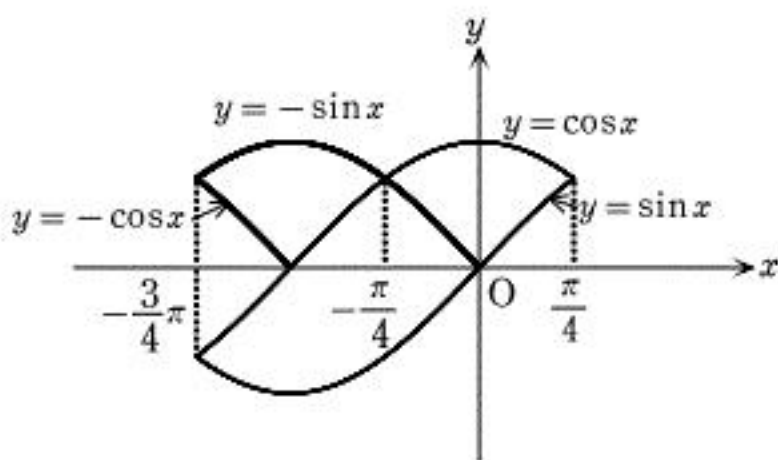
$$\begin{aligned}
 \cos x &= \sin x \\
 \sin x - \cos x &= 0 \\
 \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

$$-\frac{5}{4}\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi \quad \text{より,}$$

$$\begin{aligned}
 x - \frac{\pi}{4} &= -\pi, 0 \\
 x &= -\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

よって, $-\pi \leq x \leq \pi$ における 2 曲線のグラフは次のようになる.題意の図形は $x = -\frac{\pi}{4}$ で対称であるから,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}S &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \\
 &= 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \sqrt{2} \\
 \therefore S &= 2\sqrt{2} \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$

 $-\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ における 2 曲線の $y < 0$ の部分を x 軸で折り返すと次のようになる.

よって,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \cos^2 x dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\
 &= \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx \\
 &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 3 \cos 2x) dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{3}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \cdot 1 \right) \\
 &= \frac{\pi^2 + 6\pi}{8} \\
 \therefore V &= \frac{\pi^2 + 6\pi}{4} \quad \dots\dots(\text{答})
 \end{aligned}$$