

〔1〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	$-3 \leq x \leq 1$	$0 < a < 1$	$a \leq -3, 1 \leq a$	
(2)	エ	オ	カ	キ
	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{3}{5}$

〔解説〕

(1)

不等式 $|x+1| \leq 2$ を解くと、

$$-2 \leq x+1 \leq 2$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 1$$

を得る。 $a > 0$ のとき、 $|a| = a$ より、

$$|x-2a| < |a|$$

$$\Leftrightarrow -a < x-2a < a$$

$$\therefore a < x < 3a$$

となる。したがって、 $A \cap B \neq \emptyset$ となるのは $a > 0$ を考慮すると、

$$a < 1 \quad \text{かつ} \quad a > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < a < 1$$

のときである。つぎに、 $A \subset \overline{B} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ であることに注目して $A \subset \overline{B}$ となる条件を考える。

[1] $a > 0$ のとき

先ほどの途中過程を用いると、 $A \cap B = \emptyset$ となるのは

$$1 \leq a$$

のときである。

[2] $a < 0$ のとき

$|a| = -a$ より、

$$|x-2a| < |a|$$

$$\Leftrightarrow a < x-2a < -a$$

$$\therefore 3a < x < a$$

となる。したがって、 $A \cap B = \emptyset$ となるのは $a < 0$ を考慮すると、

$$a \leq -3$$

のときである。

以上[1], [2]より、 $a \neq 0$ のときに $A \subset \overline{B}$ となる条件は、 $a \leq -3, 1 \leq a$ である。

(2)

すべてのさいころの目の出方は同様に確からしい。1個のさいころを投げ、2以下の目が出る回数を p 、3以上の目が出る回数を m とする。 $P_3 = 0$ となるとき、

$$\begin{cases} 2p-m=0 \\ p+m=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \\ m=2 \end{cases}$$

である。したがって、 $P_3 = 0$ となる確率は、

$$\frac{3!}{2!1!} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

となる。つぎに、 $P_4 = 2$ となるとき、

$$\begin{cases} 2p-m=2 \\ p+m=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=2 \\ m=2 \end{cases}$$

である。したがって、 $P_4 = 2$ となる確率は、

$$\frac{4!}{2!2!} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

となる。 $P_6 = 0$ となるとき、

$$\begin{cases} 2p-m=0 \\ p+m=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=2 \\ m=4 \end{cases}$$

である。したがって、 $P_4 = 2$ となる確率は、

$$\frac{6!}{2!4!} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^4 = \frac{80}{243}$$

となる。 $P_3 = 0$ かつ $P_6 = 0$ となるのは、 $P_3 = 0$ となる事象が2回続けて起こる確率と等しく、

$$\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

である。したがって、 $P_6 = 0$ であったとき、 $P_3 = 0$ である条件付き確率は

$$\frac{\frac{16}{81}}{\frac{80}{243}} = \frac{3}{5}$$

となる。

〔2〕

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	
	$-\sqrt{3} \leq t \leq 2$	$t^2 - 2t - 2$	$1 + 2\sqrt{3}$	
(2)	エ	オ	カ	キ
	-1	$\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$	3	$\frac{\sqrt{3}}{9}$

〔解説〕

(1)

三角関数の合成により、

$$\begin{aligned}t &= \sin x + \sqrt{3} \cos x \\&= 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)\end{aligned}$$

と表せる。 $0 \leq x \leq \pi$ より $\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi$ であるから、

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$$

となる。したがって、 t の取りうる値の範囲は

$$-\sqrt{3} \leq t \leq 2$$

と求まる。次に、倍角および半角公式より、

$$\begin{aligned}t^2 &= \sin^2 x + 3 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x \\&= 1 + 2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x \\&= 1 + (1 + \cos 2x) + \sqrt{3} \sin 2x \\&= \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 2\end{aligned}$$

と表せる。したがって、 y を t を用いて表すと、

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - 2 \sin x - 2\sqrt{3} \cos x \\&= (t^2 - 2) - 2t \\&= t^2 - 2t - 2\end{aligned}$$

となる。さらに、

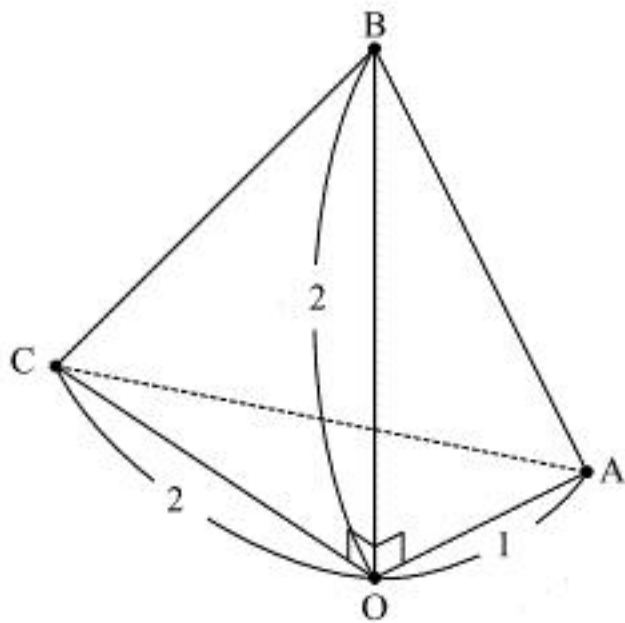
$$\begin{aligned}y &= t^2 - 2t - 2 \\&= (t - 1)^2 - 3\end{aligned}$$

と平方完成すると、 $-\sqrt{3} \leq t \leq 2$ より、 y は $t = -\sqrt{3}$ のとき最大値

$$(-\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (-\sqrt{3}) - 2 = 1 + 2\sqrt{3}$$

を取る。

(2)



$|\vec{a}| = 1, |\vec{c}| = 2, \angle COA = 120^\circ$ より、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{c} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \angle COA \\&= 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \\&= -1\end{aligned}$$

である。次に、点 M, N はそれぞれ辺 OA, BC の中点であるから、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{a} \\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c} \end{cases}$$

と表せる。点 P は線分 MN の中点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2} \overrightarrow{ON} \\&= \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b} + \frac{1}{4} \vec{c}\end{aligned}$$

となる。続いて、点 Q は直線 OP 上にあるから、 $\overrightarrow{OQ}$ は実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= k \overrightarrow{OP} \\&= \frac{k}{4} \vec{a} + \frac{k}{4} \vec{b} + \frac{k}{4} \vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。さらに、点 Q は平面 ABC 上にあるから、

$$\begin{aligned}\frac{k}{4} + \frac{k}{4} + \frac{k}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4} k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、点 P は線分 OQ を 3:1 に内分する点であるため、

$$\frac{OP}{PQ} = 3$$

と求まる。ここで、 $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c}$ より、点 Q は三角形 ABC の重心であるから、三角形

QAC の面積は三角形 ABC の面積の $\frac{1}{3}$ である。したがって、四面体 OACQ の体積も四面体

OABC の体積の $\frac{1}{3}$ となる。四面体 OABC の体積は $\angle AOB = \angle BOC = 90^\circ$ より、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3} \cdot \triangle OAC \cdot OB \\&= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OC \cdot \sin \angle COA \right) \cdot 2 \\&= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 2 \\&= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

であるから、四面体 OACQ の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

と求まる。

〔3〕

(1)(i)

2つの曲線 C_1, C_2 が共有点をもたないための必要十分条件は、 x についての2次方程式

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 - x &= -\frac{3}{2}x^2 + ax - a^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - (a+1)x + a^2 - 1 &= 0\end{aligned}$$

が、実数解を持たないことである。この2次方程式の判別式を D とすると、求める条件は

$$\begin{aligned}D &< 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 - 1) &< 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)(7a-9) &> 0 \\ \Leftrightarrow a < -1, a > \frac{9}{7}\end{aligned}$$

となる。

(答) $a < -1, a > \frac{9}{7}$

(ii)

曲線 $C_1: y = \frac{1}{2}x^2 - x$ について、 $y' = x - 1$ であるから、曲線 C_1 上の原点における接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned}y - 0 &= (0 - 1)(x - 0) \\ \Leftrightarrow y &= -x\end{aligned}$$

となる。この直線が曲線 C_2 にも接するとき、 x についての2次方程式

$$\begin{aligned}-x &= -\frac{3}{2}x^2 + ax - a^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - (a+1)x + a^2 - 1 &= 0\end{aligned}$$

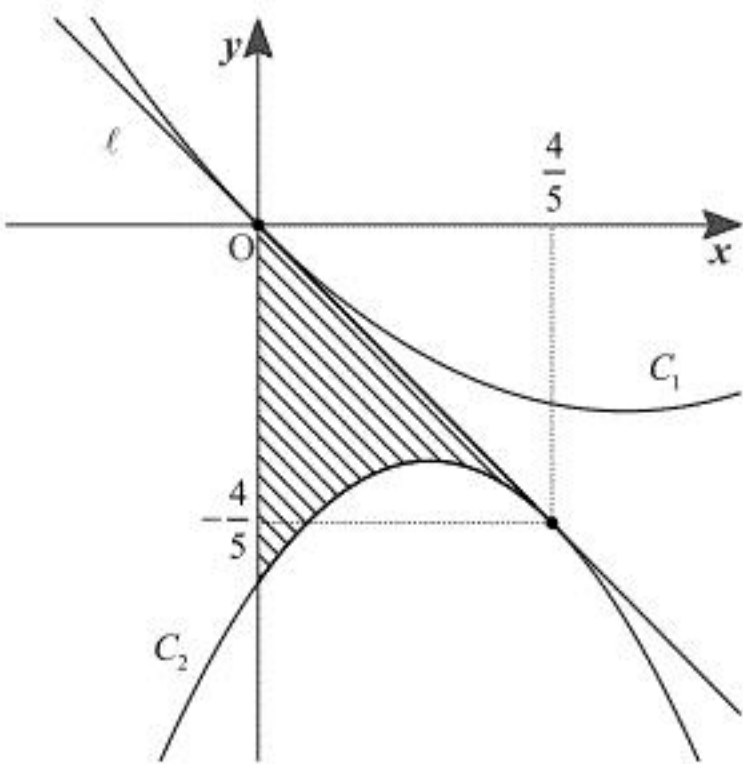
の判別式を D' とすると、

$$\begin{aligned}D' &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot (a^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+1)(5a-7) &= 0 \\ \therefore a &= \frac{7}{5} \left(\because a < -1, a > \frac{9}{7} \right)\end{aligned}$$

となる。このとき、曲線 C_2 の方程式は $y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{5}x - \frac{24}{25}$ であり、直線 ℓ と曲線 C_2 の接点は

$$\begin{aligned}-x &= -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{5}x - \frac{24}{25} \\ \Leftrightarrow (5x-4)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

より $\left(\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ である。したがって、求める面積は下図斜線部分の面積となる。



よって、

$$\begin{aligned}S &= -\int_0^{\frac{4}{5}} \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{5}x - \frac{24}{25} \right) dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \\ &= \left[\frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{24}{25}x \right]_0^{\frac{4}{5}} - \frac{8}{25} \\ &= \frac{72}{125} - \frac{8}{25} \\ &= \frac{32}{125}\end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \frac{7}{5}, S = \frac{32}{125}$

(2)

$P(x_p, y_p), Q(x_q, y_q)$ とおく。点 P は曲線 C_1, C_2 上の点であることから

$$y_p = \frac{1}{2}x_p^2 - x_p \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y_p = -\frac{3}{2}x_p^2 + ax_p - a^2 + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。ここで、 $\textcircled{1}$ の辺々を3倍したものを $\textcircled{2}$ に足すと

$$\begin{aligned}3y_p + y_p &= 3\left(\frac{1}{2}x_p^2 - x_p\right) + \left(-\frac{3}{2}x_p^2 + ax_p - a^2 + 1\right) \\ \Leftrightarrow x_p(a-3) - 4y_p - a^2 + 1 &= 0\end{aligned}$$

を得る。また、点 Q についても同様に考えると、 $x_q(a-3) - 4y_q - a^2 + 1 = 0$ が得られる。したがって、直線 $x(a-3) - 4y - a^2 + 1 = 0$ は異なる2点 P, Q を通る直線である。異なる2点を通る直線は一意に定まるため、求める直線は $x(a-3) - 4y - a^2 + 1 = 0$ でよい。

(答) $x(a-3) - 4y - a^2 + 1 = 0$