

2022—(A(理系))

■ 数 学 問 題

15 : 00 ~ 16 : 30 (90分)

受験についての注意

1. 試験開始の合図があるまで、問題を見てはいけません。
2. 数学の試験用紙は、問題用紙1部(8ページ)、記述式解答用紙(あ)1枚、記述式解答用紙(い)1枚、記述式解答用紙(う)1枚、記述式解答用紙(え)1枚から構成されています。過不足があれば監督者に申し出てください。
なお、記述式解答用紙はセットになっています。監督者の指示に従って、解答用紙を破ったりしないよう注意して、ミシン目に沿って1枚ずつ切り離してください。
3. 試験中に試験用紙の印刷の不鮮明、ページの欠落、乱れおよび解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、監督者に申し出てください。
4. 監督者の指示に従って、記述式解答用紙(4枚)の受験番号の記入欄に受験番号をそれぞれ**2カ所(計8カ所)**記入してください。
5. 解答はすべて**HBの黒鉛筆**または**HBで0.5 mm以上の芯のシャープペンシル**で記入してください。
6. 解答用紙は丁寧に取り扱いってください。
7. 解答は、解答用紙の問題番号を十分に確認のうえ、解答用紙の各問指定の枠内に記入してください。解答用紙の裏面にはいっさい記入してはいけません。下書きなどには問題用紙の余白を利用してください。
8. 解答中以外の解答用紙は必ず裏返しに置いてください。
9. 受験中は不審な行動をとってはいけません。不正行為があれば当該年度の全入学試験を無効とします。
10. 試験時間の途中で退場することはできません。
ただし、気分が悪いなど身体の調子が悪くなった場合は、手を挙げて監督者に申し出てください。
11. 試験終了の合図と同時に解答をやめてください。
12. 問題用紙は試験終了後、持ち帰ってください。

各問題の解答は、解答用紙の同じ問題番号のついた枠内に記入すること。

枠外および問題番号と異なる番号のところに書かれた解答は、採点の対象にはならない。

(1)

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

- (1) ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が、 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{17}$, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{26}$, $|\vec{a}| = \sqrt{10}$ を満たすとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ア ,
 $|\vec{b}| =$ イ である。 t が実数全体を動くとき、 $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ を t を用いて表すと ウ となるから、
 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値に最も近い整数は エ である。

- (2) 2022 の正の約数のうち、3 桁のものの和は オ である。

- (3) a は 1 でない正の定数とする。

$$\log_a(x+4) + \log_a(x-2) > \log_a(7x-2)$$

を満たす x の範囲は、 $a > 1$ ならば カ であり、 $0 < a < 1$ ならば キ である。

- (4) $(1+i)^6 =$ ク である。また、 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}+i}\right)^6 =$ ケ , $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^{12} =$ コ である。

(2)

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

条件

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列を $\{a_n\}$, 条件

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = 2b_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列を $\{b_n\}$ とする。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n =$ ア である。また、 $\sum_{k=1}^{100} a_{2k-1}$ の値は イ である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n =$ ウ である。また、 $\sum_{k=1}^n b_k$ を n の式で表すと、 $\sum_{k=1}^n b_k =$ エ である。

(3) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ を n の式で表すと $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} =$ オ である。ゆえに、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ の値は カ である。

また、 $\sqrt{n}(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \frac{\text{キ}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$ の値は ク である。

(4) $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$ を n の式で表すと、 $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k =$ ケ である。

また、 $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ を n の式で表すと $\sum_{k=1}^n a_k b_k =$ コ である。

〔3〕

次の文章中の に適する式または数値を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ。途中の計算を書く必要はない。

箱 A, B, C, D があり、それぞれに 4 枚のカードが入っている。各箱のカードには、1, 2, 3, 4 の番号がつけられている。箱 A, B, C, D からカードを 1 枚ずつ取り出し、出た数をそれぞれ a_1, b_1, c_1, d_1 とする。

(1) a_1, b_1, c_1, d_1 がすべて同じ数である場合は ア 通りあり、すべて異なる場合は イ 通りある。また、 $a_1 < b_1 < c_1 = d_1$ となる場合は ウ 通りあり、 $a_1 = b_1 < c_1 = d_1$ となる場合は エ 通りある。

(2) a_1, b_1, c_1, d_1 がすべて 2 以下である場合は オ 通りあり、 a_1, b_1, c_1, d_1 の中で最大の数が 4 である場合は カ 通りある。

(3) 取り出したカードは元の箱に戻し、もう一度、箱 A, B, C, D からカードを 1 枚ずつ取り出し、出た数をそれぞれ a_2, b_2, c_2, d_2 とする。 $i = 1, 2$ とし、次のように s_i を定める。

$$\begin{cases} s_i = a_i & (b_i, c_i, d_i \text{ のどれも } a_i \text{ と一致しないとき}) \\ s_i = 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

$s_1 = 4$ となる確率は キ である。 $s_1 = 0$ となる確率は ク である。 s_1 も s_2 も正で $s_1 + s_2 \geq 4$

となる確率 p を求めよう。そのような s_1, s_2 の組 (s_1, s_2) は ケ 個あり、 $p = \frac{\text{コ}}{65536}$ である。

[4]

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x (t - x) \cos t \, dt + 1$$

とし、関数 $g(x)$ は

$$g(x) = \sin x + 3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(t) \cos t \, dt - \frac{3}{8}$$

を満たすとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\int x \cos x \, dx$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(t) \cos t \, dt$ の値を求め、 $g(x)$ を求めよ。

(4) $-\pi \leq x \leq \pi$ において、2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。また、この図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

——— このページは白紙です。 ———

——— このページは白紙です。 ———

——— このページは白紙です。 ———