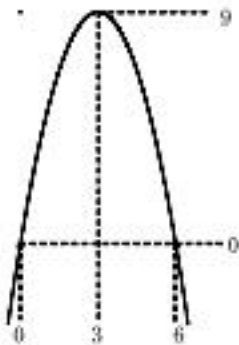


[1]

(1) $f(x)=-x^2+6x$ とおくと、 $f(x)=-(x-3)^2+9$ より、 $y=f(x)$ のグラフは次のようになる。



(i) $a=2$ のとき、 $2 \leq x \leq 4$ であるから、

$$\begin{aligned} M-m &= f(3)-f(4) \\ &= 9-8 \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

(ii) $f(0)-f(6)=0$ と $a>0$ より、 $M<0$ であるときの a の取りうる値の範囲は、 $a>6$.
よって、 $M \geq 0$ であるときの a の取りうる値の範囲は、

$$\boxed{0 < a \leq 6}$$

(iii) $2a \leq 6$ のとき、 $M-m \leq 9 (<12)$ であるから、 $2a>6$ すなわち $a>3$ のときのみを
考えればよい。

$a>3$ のとき、

$$\begin{aligned} M-m &= f(a)-f(2a) \\ &= (-a^2+6a)-(-4a^2+12a) \\ &= 3a^2-6a \end{aligned}$$

であるから、 $M-m=12$ のとき、

$$\begin{aligned} 3a^2-6a &= 12 \\ a^2-2a-4 &= 0 \end{aligned}$$

$a>3$ より、

$$a = \boxed{1+\sqrt{5}}$$

(2) 出た目の数の和を A 、 積を B とおく。

(i) $n=2$ のとき、 $2 \leq A \leq 12, 1 \leq B \leq 36$

よって、 $Y=0$ となるのは、 $B=10, 20, 30$ のときであるから、 目の組合せは、

$$(2, 5), (5, 2), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)$$

したがって、 $Y=0$ となる確率は、

$$\frac{6}{6^2} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

また、 $X>7$ となるのは、 $A=8, 9$ のときであるから、 目の組合せは、

$$(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$$

したがって、 $X \leq 7$ となる確率は、

$$1 - \frac{9}{6^2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

(ii) $n=3$ のとき、 $3 \leq A \leq 18, 1 \leq B \leq 216$

よって、 $X=3$ となるのは、 $A=3, 13$ のときであるから、 3つの数字の組合せは、

$$\{1, 1, 1\}, \{1, 6, 6\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 5, 5\}, \{4, 4, 5\}$$

ゆえに、 目の組合せは、

$$1 + {}_3C_1 + 3! + 3! + {}_3C_1 + {}_3C_1 = 22 \text{ (通り)}$$

したがって、 $X=3$ となる確率は、

$$\frac{22}{6^3} = \boxed{\frac{11}{108}}$$

また、 このうち $Y=0$ となるのは、 5 と偶数が少なくとも 1 つずつ含まれている場合であるから、 3つの数字の組合せは、

$$\{2, 5, 6\}, \{4, 4, 5\}$$

よって、 目の組合せは、

$$3! + {}_3C_1 = 9 \text{ (通り)}$$

以上から、 $X=3$ であったとき、 $Y=0$ である条件付き確率は、

$$\boxed{\frac{9}{22}}$$

[2]

(1) (i) $C: x^2 + y^2 + 4x + ay = 1$ より,

$$C: (x+2)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = 4 + \frac{a^2}{4}$$

円 C の半径が $\sqrt{5}$ であることから,

$$4 + \frac{a^2}{4} = (\sqrt{5})^2$$

$$a^2 = 4$$

$a > 0$ より,

$$a = \boxed{2}_ア$$

よって, 円 C の中心を A とすると, $A(-2, -1)$ である.

また, 直線 l と円 C の交点を P, Q とし, 点 A から直線 l に下した垂線の足を M とすると, M は線分 PQ の中点である.

ゆえに, $PM = \frac{1}{2}PQ = \frac{\sqrt{10}}{2}$ であり, $\triangle APM$ は三平方の定理より,

$$AM^2 = AP^2 - PM^2 = (\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

一方, 点 A と l との距離は,

$$AM = \frac{|-2 - 3 \cdot (-1) + 3b|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|3b + 1|}{\sqrt{10}}$$

であるから,

$$\frac{|3b + 1|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$|3b + 1| = 5$$

$$3b + 1 = \pm 5$$

$b > 0$ より,

$$b = \boxed{\frac{4}{3}}_イ$$

(ii) (i) より, $l: y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

これより, $x = 3y - 4$ であり, これを C の方程式に代入すると,

$$\{(3y - 4) + 2\}^2 + (y + 1)^2 = 5$$

$$10y^2 - 10y = 0$$

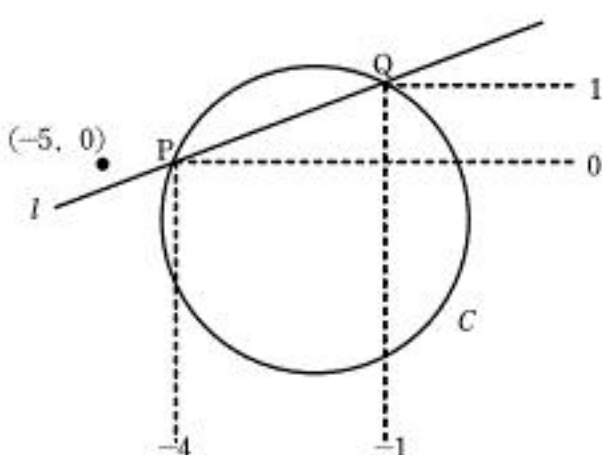
$$y(y - 1) = 0$$

$$y = 0, 1$$

よって,

$$P(-4, 0), Q(-1, 1)$$

ここで, 直線 $y = k(x + 5)$ は定点 $(-5, 0)$ を通る.



よって, 直線 $y = k(x + 5)$ と与えられた連立不等式の表す領域が共有点をもつとき, 傾き k の値が最大となるのは, 図より, 直線 $y = k(x + 5)$ が点 Q を通るときである.

このとき,

$$1 = k(-1 + 5)$$

$$k = \boxed{\frac{1}{4}}_ウ$$

(2) (i) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a , 公差を d とおくと, $a_1 - a_{10} = -18$ より,

$$a - (a + 9d) = -18$$

$$d = 2$$

これと, $S_3 = 15$ より,

$$a + (a + 2) + (a + 4) = 15$$

$$a = 3$$

したがって,

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2$ より, $\{a_n\}$ の一般項は,

$$a_n = \boxed{2n + 1}_エ \quad (n = 1, 2, \dots)$$

また,

$$S_n = \frac{1}{2}n\{3 + (2n + 1)\} = \boxed{n(n + 2)}_オ$$

(ii)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 \frac{1}{S_k} &= \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= \boxed{\frac{29}{45}}_カ \end{aligned}$$

(iii)

$$b_n = \begin{cases} 1 & (n = 3l - 2) \\ 1 & (n = 3l - 1) \\ 0 & (n = 3l) \end{cases} \quad (l = 1, 2, \dots)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3n} b_k S_k &= (S_1 + S_2) + (S_4 + S_5) + \dots + (S_{3n-2} + S_{3n-1}) \\ &= \sum_{m=1}^n (S_{3m-2} + S_{3m-1}) \\ &= \sum_{m=1}^n \{(3m - 2)3m + (3m - 1)(3m + 1)\} \\ &= \sum_{m=1}^n (18m^2 - 6m - 1) \\ &= 18 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 6 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= \boxed{6n^3 + 6n^2 - n}_キ \end{aligned}$$

[3]

(1) $f(2)=10$ より,

$$8+4a+2b+c=10$$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ であり, $f'(2)=13$ より,

$$12+4a+b=13$$

$\int_0^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx \right]_0^2 = 4 + \frac{8}{3}a + 2b + 2c$ であり, $\int_0^2 f(x)dx = 6$ より,

$$4 + \frac{8}{3}a + 2b + 2c = 6$$

以上から,

$$a=0, b=1, c=0$$

であるから,

$$f(x)=x^3+x \quad \dots\dots \text{(答)}$$

(2)

$$(x^3+x)-kx^2=x(x^2-kx+1)$$

より, C_1, C_2 が異なる 3 個の共有点をもつための条件は, $g(x)=x^2-kx+1$ とすると, $g(x)=0$ が 0 以外の異なる 2 つの実数解をもつことである.

ここで, $g(0) \neq 0$ であるから, k の取りうる値の範囲は,

$$(g(x)=0 \text{ の判別式}) > 0$$

より,

$$k^2-4 > 0$$

であるから, $k > 0$ より

$$k > 2 \quad \dots\dots \text{(答)}$$

(3) (i) $k > 2$ のとき, $g(x)=0$ の実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると, 解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta = k > 0, \alpha\beta = 1 > 0 \quad \dots\dots \text{①}$$

したがって, $0 < \alpha < \beta$

よって, 2 つの部分の面積が等しいとき,

$$\int_0^\alpha \{(x^3+x)-kx^2\}dx = \int_\alpha^\beta \{kx^2-(x^3+x)\}dx$$

$$\int_0^\alpha (x^3-kx^2+x)dx + \int_\alpha^\beta (x^3-kx^2+x)dx = 0$$

$$\int_0^\beta (x^3-kx^2+x)dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{k}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^\beta = 0$$

$$\frac{1}{4}\beta^4 - \frac{k}{3}\beta^3 + \frac{1}{2}\beta^2 = 0$$

$\beta \neq 0$ より,

$$3\beta^2 - 4k\beta + 6 = 0$$

ここで, $g(\beta)=0$ より, $\beta^2-k\beta+1=0$ すなわち $k\beta=\beta^2+1$ であるから,

$$3\beta^2 - 4(\beta^2+1) + 6 = 0$$
$$\beta^2 = 2$$

$\beta > 0$ より,

$$\beta = \sqrt{2}$$

よって, このとき,

$$k \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 + 1$$

$$k = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots \text{(答)}$$

(ii) (i) のとき, ①より,

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって, 求める共有点の x 座標は,

$$x = 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \quad \dots\dots \text{(答)}$$