

[1]

(1) $(x^2+a)^2-(x+b)^2=x^4+(2a-1)x^2-2bx+a^2-b^2$ より,

$P(x)$ と係数を比較して,

$$\begin{cases} 2a-1=11 \\ 2b=4 \\ a^2-b^2=32 \end{cases}$$

よって,

$$a=\boxed{6}_\gamma, b=\boxed{2}_\gamma$$

また,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+6)^2-(x+2)^2 \\ &= \{(x^2+6)+(x+2)\}\{(x^2+6)-(x+2)\} \\ &= \boxed{(x^2+x+8)(x^2-x+4)}_\gamma \end{aligned}$$

(2) $\log_2(x+4)-\log_4(x+7)=1$ ①

①において、真数条件より、 $x+4>0$ かつ $x+7>0$ 、すなわち
 $x>-4$

このもとで、①は,

$$\begin{aligned} \log_2(x+4) &= \log_2 2 + \frac{\log_2(x+7)}{\log_2 4} \\ 2\log_2(x+4) &= 2\log_2 2 + \log_2(x+7) \\ \log_2(x+4)^2 &= \log_2\{2^2(x+7)\} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} (x+4)^2 &= 2^2(x+7) \\ x^2+4x-12 &= 0 \\ (x+6)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

$x>-4$ より,

$$x=\boxed{2}_\pi$$

また,

$$\log_{\frac{1}{9}}(4-x)>\frac{1}{2} \qquad \text{.....②}$$

②において真数条件より、 $4-x>0$ すなわち
 $x<4$

このもとで、②は,

$$\log_{\frac{1}{9}}(4-x)>\log_{\frac{1}{9}}\frac{1}{3}$$

底 $\frac{1}{9}<1$ より,

$$4-x<\frac{1}{3}$$

よって、 $x<4$ より,

$$\boxed{\frac{11}{3}<x<4}_\theta$$

次に、 $\log_2 x=t$ とおくと、 $\frac{1}{4}\leq x\leq 8$ より、 $-2\leq t\leq 3$ であり,

$$\begin{aligned} y &= 2(\log_2\sqrt{x})^2 + \log_{\frac{1}{2}}x^2 + 5 \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + \frac{2\log_2 x}{\log_2\frac{1}{2}} + 5 \\ &= \frac{1}{2}t^2 - 2t + 5 \\ &= \frac{1}{2}(t-2)^2 + 3 \end{aligned}$$

よって、 y の最小値は,

$$\boxed{3}_\kappa$$

(3) $2023=7\cdot 17^2$ ①

1 から 2023 までの数のうち、7 で割り切れる数は $2023\div 7=17^2$ 個あるから、取り出した玉に書かれた数が 7 で割り切れる確率は,

$$\frac{17^2}{7\cdot 17^2}=\boxed{\frac{1}{7}}_\eta$$

また、7 と 17 は互いに素より、7 と 17 のいずれも割り切れる数は $2023\div 7\div 17=17$ (個) があるから、取り出した玉に書かれた数が 7 と 17 のいずれでも割り切れる確率は,

$$\frac{17}{7\cdot 17^2}=\boxed{\frac{1}{119}}_\theta$$

さらに、17 で割り切れる数は $2023\div 17=7\cdot 17$ (個) がある。

以上、7 または 17 のいずれか一方で割り切れてもう片方では割り切れない確率は,

$$\frac{(17^2-17)+(7\cdot 17-17)}{7\cdot 17^2}=\boxed{\frac{22}{119}}_\eta$$

また、2023 と互いに素である確率は,

$$1-\frac{17^2+7\cdot 17-17}{7\cdot 17^2}=\boxed{\frac{96}{119}}_\rho$$

[2]

円 C の方程式は,

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q + \frac{1}{4}$$

より, 中心は $P\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\right)$

よって, $p > 0$ より, 円 C の中心から y 軸までの距離は,

$$\boxed{\frac{p}{2}}_ア$$

点 P から直線 $l: 4x + 3y = 0$ までの距離は, $p > 0$ より,

$$\frac{\left|4 \cdot \frac{p}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{2p + \frac{3}{2}}{5} = \boxed{\frac{4p + 3}{10}}_イ$$

円 C が y 軸と直線 l のどちらにも接しているとき,

$$(C \text{ の半径}) = (P \text{ と } y \text{ 軸との距離}) = (P \text{ と } l \text{ との距離})$$

である. よって,

$$\begin{aligned}\frac{p}{2} &= \frac{4p + 3}{10} \\ p &= \boxed{3}_ウ\end{aligned}$$

このとき, $(C \text{ の半径}) = \boxed{\frac{3}{2}}_オ$ であればよいから,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{9}{4} - q + \frac{1}{4}} &= \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} - q &= \frac{9}{4} \\ q &= \boxed{\frac{1}{4}}_エ\end{aligned}$$

次に, 直線 AB は y 軸とは異なるため, 方程式を

$$kx + y - \frac{13}{2} = 0$$

とおく. これと点 P との距離は $\frac{3}{2}$ であればよく,

$$\begin{aligned}\frac{\left|\frac{3}{2}k + \frac{1}{2} - \frac{13}{2}\right|}{\sqrt{k^2 + 1}} &= \frac{3}{2} \\ \left(\frac{3}{2}k - 6\right)^2 &= \frac{9}{4}(k^2 + 1) \\ -18k + 36 &= \frac{9}{4} \\ k &= \frac{15}{8}\end{aligned}$$

よって, 直線 AB の方程式は,

$$y = \boxed{-\frac{15}{8}x + \frac{13}{2}}_カ$$

直線 AB と円 C の接点は, P を通り直線 AB に垂直な直線 $y = \frac{8}{15}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}$ と

直線 AB との交点であるから, その座標は,

$$\boxed{\left(\frac{48}{17}, \frac{41}{34}\right)}_キ$$

点 B は直線 l と直線 AB との交点であるから, その座標は,

$$\boxed{(12, -16)}_ク$$

また, 三角形 AOB の面積は,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot 12 = \boxed{39}_ケ$$

ここで, $\tan \angle OAB = \frac{8}{15}$ より, $\sin \angle OAB = \frac{8}{17}$ であり, また, $OB = \sqrt{12^2 + (-16)^2} = 20$

よって, 三角形 AOB の外接円の半径を R とする. 三角形 AOB で正弦定理より,

$$2R = \frac{OB}{\sin \angle OAB}$$

ゆえに,

$$R = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{17}{8} = \boxed{\frac{85}{4}}_コ$$

[3]
(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-2x} \sin x + e^{-2x} \cos x \\ &= e^{-2x} \boxed{-2 \sin x + \cos x} \end{aligned}$$

$$g'(x) = e^{-2x} (-2 \cos x - \sin x)$$

また,

$$\begin{aligned} \{af(x) + bg(x)\}' &= af'(x) + bg'(x) \\ &= e^{-2x} \{(-2a - b) \sin x + (a - 2b) \cos x\} \end{aligned}$$

であるから, $\{af(x) + bg(x)\}' = f(x)$ が成り立つとき, $-2a - b = 1, a - 2b = 0$ であればよく,

$$a = \boxed{-\frac{2}{5}}, b = \boxed{-\frac{1}{5}}$$

(2)

$$S_1 = \int_0^\pi |e^{-2x} \sin x| dx$$

$0 \leq x \leq \pi$ で $e^{-2x} > 0, \sin x \geq 0$ より,

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^\pi e^{-2x} \sin x dx \\ &= \left[-\frac{2}{5} e^{-2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{-2x} \cos x \right]_0^\pi \\ &= \boxed{\frac{1}{5} e^{-2\pi} + \frac{1}{5}} \\ &= \frac{e^{-2\pi}}{5} (1 + e^{2\pi}) \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |e^{-2x} \sin x| dx \\ &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx \end{aligned}$$

ここで, $u = x - (n-1)\pi$ とおくと,

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad \begin{array}{c|c} x & (n-1)\pi \rightarrow n\pi \\ \hline u & 0 \rightarrow \pi \end{array}$$

より,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^\pi e^{-2\{u + (n-1)\pi\}} |\sin\{u + (n-1)\pi\}| du \\ &= e^{-2(n-1)\pi} \int_0^\pi e^{-2u} \sin u du \\ &= \boxed{\frac{e^{-2n\pi}}{5}} (1 + e^{2\pi}) \end{aligned}$$

以上から, S_n は初項 $\frac{e^{-2\pi}}{5} (1 + e^{2\pi})$, 公比 $e^{-2\pi}$ ($0 < e^{-2\pi} < 1$) であるから, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は収束し,

その和は,

$$\frac{\frac{e^{-2\pi}}{5} (1 + e^{2\pi})}{1 - e^{-2\pi}} = \boxed{\frac{1 + e^{2\pi}}{5e^{2\pi} - 5}}$$

(3)

$$\int \{f(x)\}^2 dx = \int e^{-4x} \sin^2 x dx = \int e^{-4x} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$$

一方,

$$\begin{aligned} (e^{-4x})' &= -4e^{-4x} \\ \{f(2x)\}' &= (e^{-4x} \sin 2x)' = -4e^{-4x} \sin 2x + 2e^{-4x} \cos 2x \\ \{g(2x)\}' &= (e^{-4x} \cos 2x)' = -4e^{-4x} \cos 2x - 2e^{-4x} \sin 2x \end{aligned}$$

より,

$$\{re^{-4x} + sf(2x) + tg(2x)\}' = e^{-4x} \{-4r + (-4s - 2t) \sin 2x + (2s - 4t) \cos 2x\}$$

であるから,

$$-4r = \frac{1}{2}, -4s - 2t = 0, 2s - 4t = -\frac{1}{2}$$

であればよい.

したがって,

$$r = \boxed{-\frac{1}{8}}, s = \boxed{-\frac{1}{20}}, t = \boxed{\frac{1}{10}}$$

(4)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \pi \{f(x)\}^2 dx &= \pi \left[-\frac{1}{8} e^{-4x} - \frac{1}{20} e^{-4x} \sin 2x + \frac{1}{10} e^{-4x} \cos 2x \right]_0^\pi \\ &= \pi \left\{ \left(-\frac{1}{8} e^{-4\pi} + \frac{1}{10} e^{-4\pi} \right) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= \boxed{\frac{\pi}{40} (1 - e^{-4\pi})} \end{aligned}$$

[4]

(1) $z_2 = 1$ より,

$$z_3 = \frac{1+i}{2} + 1 = \frac{3+i}{2} \qquad \cdots \cdots \text{ (答)}$$

$$\alpha = \frac{1+i}{2} \alpha + 1 \text{ より,}$$

$$\frac{1-i}{2} \alpha = 1$$

よって,

$$\alpha = \frac{2}{1-i} = 1+i \qquad \cdots \cdots \text{ (答)}$$

また,

$$\begin{aligned} \alpha^{20} &= (1+i)^{20} \\ &= \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^{20} \\ &= 1024 (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) \\ &= -1024 \qquad \cdots \cdots \text{ (答)} \end{aligned}$$

(2) $n \geq 2$ において,

$$\begin{aligned} |z_n - z_{n+1}| &= \left| \left(\frac{1+i}{2} z_{n-1} + 1 \right) - \left(\frac{1+i}{2} z_n + 1 \right) \right| \\ &= \left| \frac{1+i}{2} (z_{n-1} - z_n) \right| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} |z_{n-1} - z_n| \end{aligned}$$

$|z_1 - z_2| = 1$ より, $\{ |z_n - z_{n+1}| \}$ は初項 1, 公比 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから, $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - z_{n+1}|$ は収束し,

その和は,

$$\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 + \sqrt{2} \qquad \cdots \cdots \text{ (答)}$$

(3) $z_{n+1} - \alpha = \frac{1+i}{2} (z_n - \alpha)$ より,

$$|z_{n+1} - \alpha| = \left| \frac{1+i}{2} \right| |z_n - \alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n - \alpha|$$

よって,

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_n$$

であるから, $a_1 = |-1-i| = \sqrt{2}$ より,

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \sqrt{2}$$

したがって, $\{ a_n \}$ の一般項は,

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-2} \quad (n=1, 2, \cdots) \qquad \cdots \cdots \text{ (答)}$$

$$(4) \quad \frac{z_{n+1} - \alpha}{z_n - \alpha} = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

より,

$$\theta = \frac{\pi}{4} \qquad \cdots \cdots \text{ (答)}$$

また, $|z_n - \alpha| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-2}, |z_{n+1} - \alpha| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}$ より,

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2^n}$$

したがって, $\{ S_n \}$ の一般項は,

$$S_n = \frac{1}{2^n} \quad (n=1, 2, \cdots) \qquad \cdots \cdots \text{ (答)}$$