

【1】

【解答】

(1)	(i)	ア			
		$-2-\sqrt{10} < a < -2+\sqrt{10}$			
	(ii)	イ		ウ	
		1		$-2-\sqrt{10} < a \leq -5$	
(2)	(i)	エ			
		$\frac{1}{3}$			
	(ii)	オ		カ	キ
		$\frac{2}{9}$		$\frac{13}{27}$	$\frac{1}{13}$

【解説】

(1)(i)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+a^2+2a-3$$

とおく。このとき、 $y=f(x)$ が x 軸と異なる2点で交わる条件は、 $f(x)=0$ の判別式 D について、 $D>0$ となることである。よって、 a の取りうる値の範囲は、

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 2a - 3) &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 4a - 6 &< 0 \\ \therefore -2 - \sqrt{10} < a < -2 + \sqrt{10} \end{aligned}$$

である。

(ii)

2点A、Bのうち、一方が原点に一致するとき、

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+3)(a-1) &= 0 \\ \therefore a &= -3, 1 \end{aligned}$$

である。

[1] $a=-3$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-6) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 6 \end{aligned}$$

であり、これは条件に不適である。

[2] $a=1$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x+2) &= 0 \\ \therefore x &= 0, -2 \end{aligned}$$

であり、これは条件に適する。

以上、[1]、[2]より、一方の x 座標が負であり、もう一方が原点に一致するとき、 $a=1$ である。また、 $y=f(x)$ の軸は $x=-a$ であるから、2点A、Bの x 座標がともに4以上であるとき、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} D > 0 \\ -a > 4 \\ f(4) \geq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -2-\sqrt{10} < a < -2+\sqrt{10} \\ a < -4 \\ a^2 + 6a + 5 \geq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -2-\sqrt{10} < a < -2+\sqrt{10} \\ a < -4 \\ (a+5)(a+1) \geq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -2-\sqrt{10} < a < -2+\sqrt{10} \\ a < -4 \\ a \leq -5, -1 \leq a \end{cases} \\ \therefore &-2-\sqrt{10} < a \leq -5 \end{aligned}$$

となる。

(2)(i)

3人の手の出し方は $3^3=27$ (通り)存在し、これらは同様に確からしい。ここで、3人でじゃんけんをしてあいことなるのは、3人全員が同じ手を出しているか、グー、チョキ、パーの3種類の手が出ているときである。よって、 $n=3$ のとき、あいこになる確率は、

$$\frac{3+3!}{27}=\frac{1}{3}$$

である。

(ii)

4人の手の出し方は $3^4=81$ (通り)存在し、これらは同様に確からしい。ここで、2人だけが勝つ確率は、勝つ手の種類と勝つ人の選び方を考えて、

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_4C_2}{81}=\frac{2}{9}$$

である。また、あいこになるのは、4人全員が同じ手を出しているか、グー、チョキ、パーの3種類の手が出ているときである。後者について2人が出している手の種類を考えると、あいこになる確率は、

$$\frac{3+{}_3C_1 \cdot \frac{4!}{2!}}{81}=\frac{13}{27}$$

である。よって、あいこになったとき、全員が同じ手を出している条件付き確率は、

$$\frac{\frac{3}{81}}{\frac{13}{27}}=\frac{1}{13}$$

である。

【2】

【解答】

(1)	(i)	ア	イ
		$-\sqrt{2}\leq t\leq 1$	$-t^2-2t+1$
	(ii)	ウ	
		$\frac{\pi}{4}$	
	(iii)	エ	
		$-2< p < 1-2\sqrt{2}$	
(2)	(i)	オ	カ
		$\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$	$\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$
	(ii)	キ	
		$\frac{1}{2}$	

【解説】

(1)(i)

加法定理より、

$$t=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

と変形できる。 $\frac{\pi}{4}\leq x+\frac{\pi}{4}\leq \frac{5}{4}\pi$ より、 t の取りうる値の範囲は

$$-\sqrt{2}\leq t\leq 1$$

である。また、 $t=\cos x-\sin x$ の両辺を2乗して

$$\begin{aligned}t^2&=1-2\sin x\cos x\\ \Leftrightarrow \sin x\cos x&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t^2\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}\sin 2x-2\cos x+2\sin x&=2\sin x\cos x-2(\cos x-\sin x)\\ &=2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t^2\right)-2t\\ &=-t^2-2t+1\end{aligned}$$

である。

(ii)

$t=\cos x-\sin x$ と置換すると、 $p=-1$ のとき方程式①は

$$\begin{aligned}-t^2-2t&=0\\ \Leftrightarrow t(t+2)&=0\\ \therefore t&=-2,0\end{aligned}$$

となる。このうち $-\sqrt{2}\leq t\leq 1$ を満たす解は $t=0$ のみである。このとき $0\leq x\leq \pi$ の下では

$$\begin{aligned}t&=0\\ \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)&=0\\ \therefore x&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

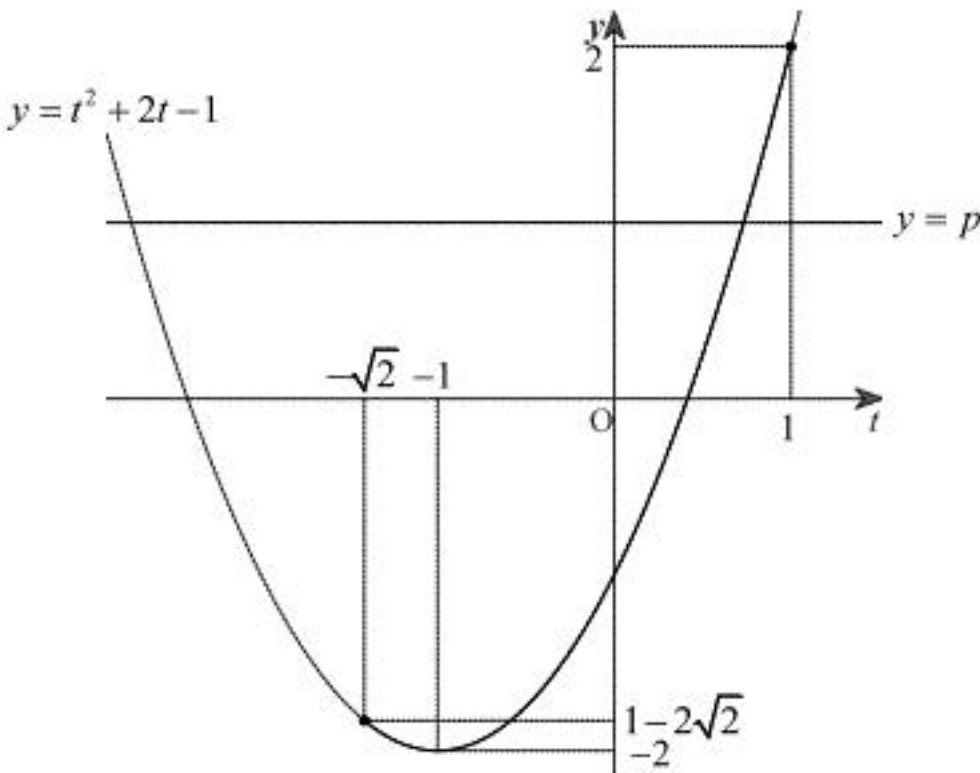
であるから、方程式①の実数解は $x=\frac{\pi}{4}$ である。

(iii)

$t=\cos x-\sin x$ と置換すると方程式①は

$$p=t^2+2t-1\left(-\sqrt{2}\leq t\leq 1\right)$$

と変形できる。このとき $y=p$ と $y=t^2+2t-1$ のグラフは以下ようになる。



ここで、 $t=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ について、 t の値に対応する x の個数は

$$\begin{aligned}t&=-\sqrt{2}, -1< t\leq 1\text{のとき}1\text{個}\\ -\sqrt{2}< t\leq -1\text{のとき}2\text{個}\end{aligned}$$

である。よって方程式①が異なる実数解をちょうど3個もつ条件は、 $y=p$ と $y=t^2+2t-1$ のグラフが $t=-\sqrt{2}, -1< t\leq 1$ の範囲と $-\sqrt{2}< t\leq -1$ の範囲で1個ずつ共有点をもつことである。よって、上図より

$$-2< p < 1-2\sqrt{2}$$

である。

(2)(i)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\vec{a}+\vec{b}\\\overrightarrow{AG}&=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AG}\right)\\ &=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

である。ここで、Pは直線AM上にあるため、実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=t\overrightarrow{AM}\\ &=t\vec{a}+t\vec{b}+\frac{1}{2}t\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。また、Pは平面BDE上にあるため

$$\begin{aligned}t+t+\frac{1}{2}t&=1\\ \therefore t&=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$$

である。

(ii)

Qは直線DP上にあるため、実数 u を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ}&=\overrightarrow{AD}+u\overrightarrow{DP}\\ &=\vec{b}+u\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}-\vec{b}\right)\\ &=\frac{2}{5}u\vec{a}+\left(1-\frac{3}{5}u\right)\vec{b}+\frac{1}{5}u\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。また、Qは平面ABE上にあるため、

$$\begin{aligned}1-\frac{3}{5}u&=0\\ \therefore u&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

となるため、Qは線分EBを2:1に内分する点である。よって

$$\frac{BQ}{QE}=\frac{1}{2}$$

である。

【3】

(1)

条件より、 C_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y-4a^2 &= (x-2a)^2 \\ \Leftrightarrow y &= x^2-4ax+8a^2 \end{aligned}$$

であるから、点Pの x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 &= x^2-4ax+8a^2 \\ \Leftrightarrow 4ax &= 8a^2 \\ \therefore x &= 2a \end{aligned}$$

である。このとき点Pの y 座標は $(2a)^2=4a^2$ であるから、求める座標は $P(2a, 4a^2)$ である。

(答) $P(2a, 4a^2)$

(2)(i)

C_1 の方程式を x で微分すると

$$y'=2x$$

であるから、接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y-t^2 &= 2t(x-t) \\ \therefore y &= 2tx-t^2 \end{aligned}$$

である。

(答) $\ell: y=2tx-t^2$

(ii)

直線 ℓ と放物線 C_2 の方程式を連立すると

$$\begin{aligned} x^2-4ax+8a^2 &= 2tx-t^2 \\ \Leftrightarrow x^2-2(2a+t)x+8a^2+t^2 &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

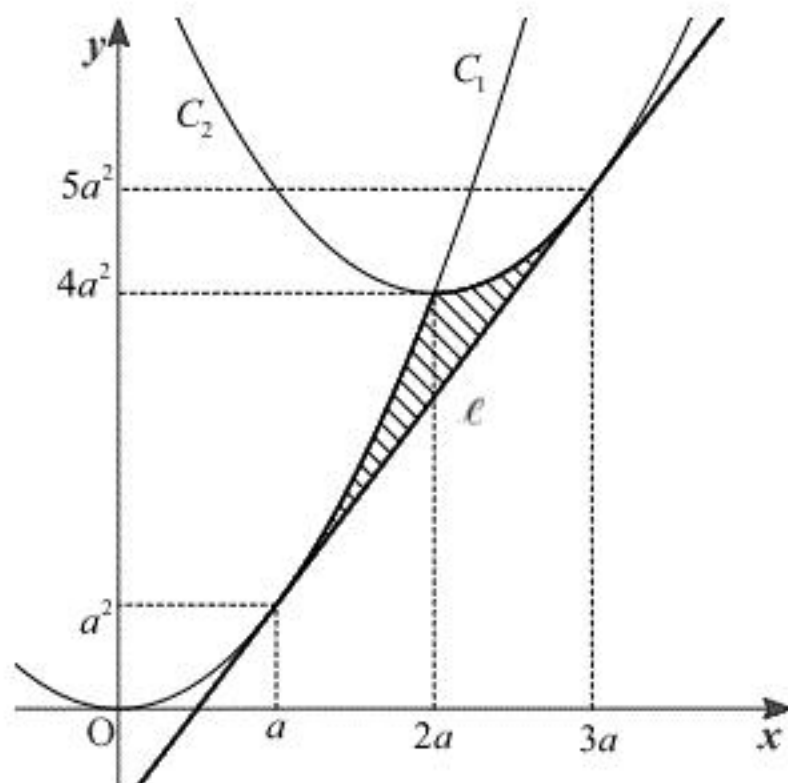
である。直線 ℓ が放物線 C_2 にも接しているとき、 $\textcircled{1}$ の判別式を D とすると、 $D=0$ が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a+t)^2-(8a^2+t^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2+4at-8a^2 &= 0 \\ \therefore t &= a \end{aligned}$$

である。このとき $\ell: y=2ax-a^2$ であるから、直線 ℓ と2つの曲線 C_1, C_2 との交点の x 座標はそれぞれ

$$\begin{aligned} 2ax-a^2 &= x^2 \\ \Leftrightarrow (x-a)^2 &= 0 \\ \therefore x &= a \\ 2ax-a^2 &= x^2-4ax+8a^2 \\ \Leftrightarrow (x-3a)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 3a \end{aligned}$$

である。よって、 S は下図の斜線部の領域の面積である。



よって求める S は

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{2a} \{x^2-(2ax-a^2)\} dx + \int_{2a}^{3a} \{(x^2-4ax+8a^2)-(2ax-a^2)\} dx \\ &= \int_a^{2a} (x-a)^2 dx + \int_{2a}^{3a} (x-3a)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3 \right]_a^{2a} + \left[\frac{1}{3}(x-3a)^3 \right]_{2a}^{3a} \\ &= \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} \\ &= \frac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$

である。

(答) $S=\frac{2}{3}a^3$

(3)

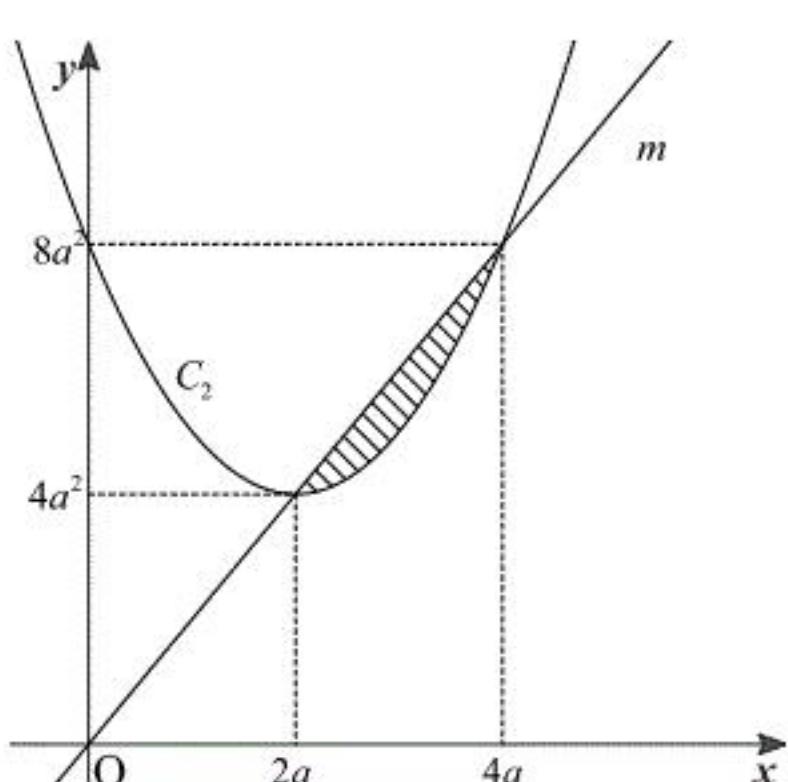
直線 m は傾きが $2a$ で $P(2a, 4a^2)$ を通るから、直線 m の方程式は

$$\begin{aligned} y-4a^2 &= 2a(x-2a) \\ \Leftrightarrow y &= 2ax \end{aligned}$$

である。また直線 m と放物線 C_2 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 2ax &= x^2-4ax+8a^2 \\ \Leftrightarrow (x-2a)(x-4a) &= 0 \\ \therefore x &= 2a, 4a \end{aligned}$$

であるから、 T は下図の斜線部の領域の面積である。



よって求める T は

$$\begin{aligned} T &= \int_{2a}^{4a} \{2ax-(x^2-4ax+8a^2)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+3ax^2-8a^2x \right]_{2a}^{4a} \\ &= -\frac{1}{3}(64a^3-8a^3)+3a(16a^2-4a^2)-8a^2(4a-2a) \\ &= -\frac{56}{3}a^3+36a^3-16a^3 \\ &= \frac{4}{3}a^3 \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \frac{T}{S} &= \frac{\frac{4}{3}a^3}{\frac{2}{3}a^3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{T}{S}=2$