

[1]

$$(1) (i) \cos \angle BAC = \frac{1}{3} \text{ より,}$$

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって, $\triangle ABC$ の面積は,

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \boxed{5\sqrt{2}}_ア$$

また, $\triangle ABC$ において余弦定理より,

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC \\ &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 24 \end{aligned}$$

であるから, $BC = 2\sqrt{6}$

よって, 外接円の半径を R とすると, $\triangle ABC$ において正弦定理より, 直径は,

$$2R = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2\sqrt{6} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \boxed{3\sqrt{3}}_イ$$

(ii) 点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とすると, $\angle OHA = \angle OHB = \angle OHC = 90^\circ$,
 $OA = OB = OC$, OH 共通より,

$$\triangle OHA \equiv \triangle OHB \equiv \triangle OHC$$

よって, $HA = HB = HC$ であるから, 点 H は $\triangle ABC$ の外心である.

したがって, 点 D は点 H と一致するから,

$$\angle ODA = \angle ODB = \angle ODC = 90^\circ$$

ゆえに,

$$OD = \sqrt{OA^2 - DA^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{3}{2}}_ウ$$

これより, 四面体 $OABC$ は,

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot OD = \frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} = \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}}_エ$$

(2) (i) $X = 0$ となるのは, $\boxed{1}$ を 3 枚取り出したときのみであるから, その確率は,

$$\frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} = \boxed{\frac{1}{20}}_オ$$

(ii) $X = 2$ となるのは, $\boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{3}$ または $\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}$ と取り出すときであるから,

その確率は,

$$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_1C_1 + {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_1C_1}{{}_6C_3} = \frac{3+6}{20} = \boxed{\frac{9}{20}}_カ$$

(iii) X の取りうる範囲は 0, 1, 2 のみであるから, (i), (ii) より, $X = 1$ となる確率は,

$$1 - \left(\frac{1}{20} + \frac{9}{20}\right) = \frac{1}{2}$$

また, $X = 1$ かつ $\boxed{1}$ のカードを取り出さないのは, $\boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{3}$ と取り出すときで

あるから, その確率は,

$$\frac{{}_2C_2 \cdot {}_1C_1}{{}_6C_3} = \frac{1}{20}$$

よって, $X = 1$ かつ $\boxed{1}$ のカードを取り出す確率は,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$$

以上から, 求める条件付き確率は,

$$\frac{\frac{9}{20}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{9}{10}}_キ$$

[2]

(1)(i) 方程式①は,

$$(-x^2 - 2x + 3)a + (x^3 + 3x^2 + x + 3) = 0$$

$$(1-x)(x+3)a + (x+3)(x^2+1) = 0$$

$$(x+3)(x^2 - ax + a + 1) = 0$$

よって, ①は a の値にかかわらず $x = \boxed{-3}$ を解にもち, 左辺を $x+3$ で割ったときの商は,

$$\boxed{x^2 - ax + a + 1}$$

(ii) 方程式①が虚数解をもつための条件は, x の方程式

$$x^2 - ax + a + 1 = 0 \quad \dots\dots ②$$

が虚数解をもつことである.

よって, a の取りうる値の範囲は,

$$(-a)^2 - 4(a+1) < 0$$

$$a^2 - 4a - 4 < 0$$

$$\boxed{2 - 2\sqrt{2} < a < 2 + 2\sqrt{2}}$$

また, α, β は②の2解であるから,

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a + 1$$

よって,

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= a^2 - 2(a+1)$$

$$= a^2 - 2a - 2$$

$$= (a-1)^2 - 3$$

これと, $2 - 2\sqrt{2} < 1 < 2 + 2\sqrt{2}$ より,

$$\alpha^2 + \beta^2 \text{ の最小値は, } \boxed{-3}$$

(2)(i) $\{a_n\}$ の公差を d とすると, $2a_2 + a_4 = 6$ より,

$$2(-3+d) + (-3+3d) = 6$$

$$d = 3$$

よって,

$$a_n = -3 + (n-1) \cdot 3 = \boxed{3n-6}$$

$\{a_n\}$ の項は3の倍数であり, 最初に一の位が5となるのは15であるから, $b_1 = 15$

$\{a_n\}$ の項の中で, 一の位が5となる項とその次の一の位が5となる項の差は10の倍数であり,

これと $d = 3$ より,

$$b_{k+1} = b_k + 10 \cdot 3$$

したがって,

$$b_n = 15 + (n-1) \cdot 30 = \boxed{30n-15}$$

(ii)

$$\sum_{k=1}^{20} b_{2k} = \sum_{k=1}^{20} (30 \cdot 2k - 15)$$

$$= 15 \sum_{k=1}^{20} (4k - 1)$$

$$= 15 \left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 - 20 \right)$$

$$= \boxed{12300}$$

[3]

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} x(-x-1) & (x \leq 0) \\ x(x-1) & (x \geq 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x(x+1) & (x \leq 0) \\ x(x-1) & (x \geq 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x^2-x & (x \leq 0) \\ x^2-x & (x \geq 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} & (x \leq 0) \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} & (x \geq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

したがって,

$$m = -\frac{1}{4}, M = \frac{1}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) $x < 0$ において, $f'(x) = -2x-1$ より, $A(-1, 0)$ における C の接線 l の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= \{-2(-1)-1\}(x+1) \\ y &= x+1 \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

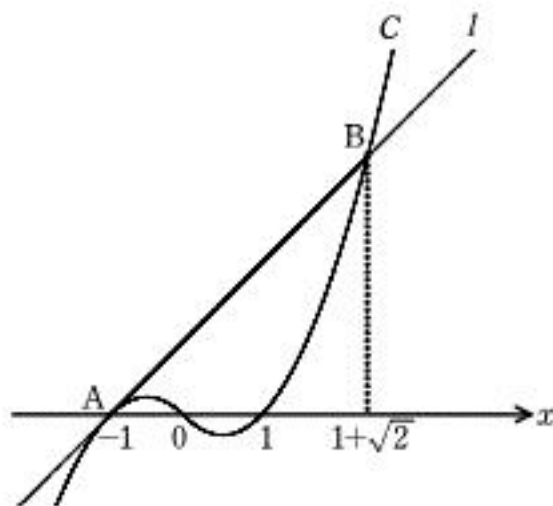
また, $x+1 = x^2-x$ とすると,

$$x^2-2x-1=0 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

これを, $x \geq 0$ において解くことにより, 点 B の x 座標は,

$$x = 1 + \sqrt{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3)



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{(x+1) - (-x^2-x)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 \{(x+1)^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

次に, $1 + \sqrt{2} = \alpha$ とおくと, α は①の解であるから,

$$\alpha^2 = 2\alpha + 1$$

よって,

$$\begin{aligned} T &= \int_0^\alpha \{(x+1) - (x^2-x)\} dx \\ &= \int_0^\alpha (-x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_0^\alpha \\ &= -\frac{1}{3}\alpha \cdot \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha \\ &= -\frac{1}{3}\alpha(2\alpha + 1) + (2\alpha + 1) + \alpha \\ &= -\frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{8}{3}\alpha + 1 \\ &= -\frac{2}{3}(2\alpha + 1) + \frac{8}{3}\alpha + 1 \\ &= \frac{4\alpha + 1}{3} \\ &= \frac{5 + 4\sqrt{2}}{3} \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$