〔１〕

(1) 与えられた等式から，

$$\frac{6x(x+2)(x^2+Cx+4)}{(x+2)(x^2+Cx+4)(x^3+8)}=\frac{A(x^2+Cx+4)(x^3+8)}{(x+2)(x^2+Cx+4)(x^3+8)}+\frac{(x+B)(x+2)(x^3+8)}{(x+2)(x^2+Cx+4)(x^3+8)}$$

よって，

$$6x(x+2)(x^2+Cx+4)=A(x^2+Cx+4)(x^3+8)+(x+B)(x+2)(x^3+8)$$

つまり，

$$\begin{aligned}&6\left\{x^4+(C+2)x^3+(4+2C)x^2+8x\right\}\\&\quad=(A+1)x^5+(AC+B+2)x^4+(4A+2B)x^3+(8A+8)x^2+(8AC+8B+16)x+32A+16B\end{aligned}$$

が恒等式となればよい．

ゆえに，

$$\begin{cases}0=A+1\\6=AC+B+2\\6(C+2)=2(2A+B)\\12(2+C)=8(A+1)\\48=8(AC+B+2)\\0=16(2A+B)\end{cases}$$

これらをすべて満たすのは，

$$A=\boxed{-1}_{ア},\ B=\boxed{2}_{イ},\ C=\boxed{-2}_{ウ}$$

(2)(i) 取り出した4枚のカードに書かれた数字がすべて7以下である確率は，

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\boxed{\frac{5}{18}}_{エ}$$

(ii) 取り出した4枚のカードの中に8と書かれた数字がある確率は，

$$\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4}=\boxed{\frac{4}{9}}_{オ}$$

(iii) 和が12以下となる4つの数字の組み合せは，

$\{1,2,3,4\}\{1,2,3,5\}\{1,2,3,6\}\{1,2,4,5\}$

の4通り．

したがって，取り出した4枚のカードに書かれた数字の和が12以下である確率は，

$$\frac{4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\boxed{\frac{2}{63}}_{カ}$$

(3) 数列$\{a_n\}$の公差は，

$$\frac{a_8-a_3}{8-3}=\boxed{\frac{2}{5}}_{キ}$$

よって，初項は$a_1=a_3-2\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$より，

$$a_n=\frac{1}{5}+(n-1)\cdot\frac{2}{5}=\boxed{\frac{1}{5}(2n-1)}_{ク}$$

であり，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}n\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}(2n-1)\right\}=\boxed{\frac{1}{5}n^2}_{ケ}$$

また，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}ka_k\\&=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)\\&=\frac{1}{5}\left\{2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}\\&=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\cdot1\cdot2-\frac{1}{2}\cdot0\cdot1\right)\\&=\boxed{\frac{2}{15}}_{コ}\end{aligned}$$

〔2〕
(1)

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}_{ア}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}_{イ}$$

$$\tan\theta\sin 2\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$
$$=2\sin^2\theta$$
$$=\boxed{1-\cos 2\theta}_{ウ}$$

よって，$\tan\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ より，

$$\tan\frac{\pi}{24}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}$$
$$=\frac{1-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$
$$=\frac{4-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{4}$$
$$=\boxed{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}_{エ}$$

正二十四角形の内接円の中心 O から各頂点に線分を引き，合同な 24 個の二等辺三角形に分割する．その二等辺三角形のひとつを OAB とし，点 O から辺 AB に下した垂線の足を H とすると，OH = 1 だから，

$$\left(\frac{1}{2}\times 1\times 1\cdot\tan\frac{\pi}{24}\right)\times 2\times 24=\boxed{24(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2)}_{オ}$$

(2)(i)

$$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)$$
$$=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$$
$$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$$
$$=(2x^2-1)x-2(1-x^2)x$$
$$=\boxed{4x^3-3x}_{カ}$$

$$\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)$$
$$=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$$
$$=2\sin\theta\cos^2\theta+(2\cos^2\theta-1)\sin\theta$$
$$=2x^2\sin\theta+(2x^2-1)\sin\theta$$
$$=\left(\boxed{4x^2-1}_{キ}\right)\sin\theta$$

また，$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ のとき，$\cos 3\theta=\cos(2\pi-2\theta)$ より，

$$\cos 3\theta=\cos 2\theta$$
$$4x^3-3x=2x^2-1$$
$$(x-1)(4x^2+2x-1)=0$$

$0<\cos\dfrac{2}{5}\pi<1$ より，

$$\cos\frac{2}{5}\pi=x=\boxed{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}_{ク}$$

(ii)

$$\cos 5\theta=\cos(3\theta+2\theta)$$
$$=\cos 3\theta\cos 2\theta-\sin 3\theta\sin 2\theta$$
$$=(4x^3-3x)(2x^2-1)-(4x^2-1)\sin\theta\cdot 2x\sin\theta$$
$$=(4x^3-3x)(2x^2-1)-2x(4x^2-1)(1-x^2)$$
$$=\boxed{16x^5-20x^3+5x}_{ケ}$$

$\theta=\dfrac{\pi}{10}$ とすると，

$$\cos 5\theta=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

よってこのとき，

$$16x^5-20x^3+5x=0$$
$$x(16x^4-20x^2+5)=0$$

ここで，$\cos^2\dfrac{\pi}{10}>\cos^2\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{4}$ であるから，

$$\cos^2\frac{\pi}{10}=x^2=\boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}_{コ}$$

〔3〕

(1)

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2}=\sqrt{1^2-2\cdot 0+2^2}=\boxed{\sqrt{5}}_{ア}$$

また，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$ より，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AD}\right|^2&=\left|-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right|^2\\&=\frac{4}{9}\cdot 1^2+\frac{1}{4}\cdot 2^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2-\frac{2}{3}\\&=1\end{aligned}$$

であるから，$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\boxed{1}_{イ}$

さらに，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot\left(-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot 2^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot 1^2\\&=\boxed{2}_{ウ}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\triangle ABD&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 1^2-2^2}\\&=\boxed{\frac{1}{2}}_{エ}\end{aligned}$$

(2)　点 E は直線 AB 上の点であるから，実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{OE}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$$

と表せる．

このとき，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\left(\dfrac{2}{3}-k\right)\vec{a}+\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\vec{b}+\vec{c}$ であるから，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より，

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\frac{2}{3}-k\right)\vec{a}+\left(k-\frac{1}{2}\right)\vec{b}+\vec{c}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0\\&-\left(\frac{2}{3}-k\right)+4\left(k-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}=0\\&5k-2=0\\&k=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

したがって，

$$\boxed{\overrightarrow{OE}=\frac{1}{5}(3\vec{a}+2\vec{b})}_{オ}$$

また，点 E は線分 AB を

$$\frac{2}{5}:\frac{3}{5}=1:\boxed{\frac{3}{2}}_{カ}$$

に内分する．

(3)　実数 s，t を用いて，$\overrightarrow{AF}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}$ と表すと，$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}$

ここで，

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=-1$$

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{AD}=\vec{a}\cdot\left(-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)=-\frac{2}{3}$$

と，$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より，

$$(\vec{a}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

$$-1+5s+2t=0$$

さらに，$\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ より，

$$(\vec{a}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AD}=0$$

$$-\frac{2}{3}+2s+t=0$$

以上から，$s=-\dfrac{1}{3}, t=\dfrac{4}{3}$ より，

$$\overrightarrow{AF}=\boxed{-\frac{1}{3}}_{キ}\overrightarrow{AB}+\boxed{\frac{4}{3}}_{ク}\overrightarrow{AD}$$

よって，$\overrightarrow{OF}=\vec{a}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AD}$ より，

$$\left|\overrightarrow{OF}\right|^2=1+\frac{1}{9}\cdot(\sqrt{5})^2+\frac{16}{9}\cdot 1^2+2\left\{-\frac{1}{3}(-1)+\frac{4}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{4}{9}\cdot 2\right\}=\frac{4}{9}$$

であるから，

$$\left|\overrightarrow{OF}\right|=\boxed{\frac{2}{3}}_{ケ}$$

したがって，四面体 OABD の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle ABD\cdot OF=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\boxed{\frac{1}{9}}_{コ}$$

〔4〕

(1)

$$
\begin{aligned}
h\left(\frac{1}{3}\right)&=f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\\
&=\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}\\
&=\frac{1}{3}(-\beta)+\frac{2}{3}(\alpha-\beta)\\
&=\frac{2}{3}\alpha-\beta
\end{aligned}
$$
……(答)

$$
\begin{aligned}
h(x)-h(1-x)&=\left\{f(x)+f(1-x)\right\}-\left\{f(1-x)+f(1-(1-x))\right\}\\
&=f(x)+f(1-x)-f(1-x)-f(x)\\
&=0
\end{aligned}
$$
……(答)

(2)

$$f'(x)=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$
……(答)

また，

$$g'(x)=\left\{f(1-x)\right\}'=(1-x)'f'(1-x)=-f'(1-x)$$

より，

$$a=-1$$
……(答)

(3) $h'(x)=f'(x)+g'(x)=(\log x+1)-\left\{\log(1-x)+1\right\}=\log x-\log(1-x)$ より，

$h(x)$ の増減は次のようになる．

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$-\alpha$	↗	

したがって，$h(x)$ は $x=\frac{1}{2}$ のとき，

極小値　$-\alpha$ ……(答)

をとる．

(4)

$$
\begin{aligned}
\int f(x)dx&=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx\\
&=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x\,dx\\
&=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C_1
\end{aligned}
$$

より，

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2$$
……(答)

また，$1-x=t$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\int g(x)dx&=\int f(1-x)dx\\
&=\int f(t)(-dt)\\
&=-\int f(t)dt\\
&=-F(t)+C_2\\
&=-F(1-x)+C_2
\end{aligned}
$$

より，

$$b=-1$$
……(答)

(5)　(1)より，

$$h\left(\frac{1}{3}\right)=h\left(1-\frac{1}{3}\right)=h\left(\frac{2}{3}\right)$$

これと(3)の増減表から，曲線 $y=h(x)$ と $y=h\left(\frac{1}{3}\right)$ の共有点の x 座標は $x=\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ のみであり，

$\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$ において，$h\left(\frac{1}{3}\right)>h(x)$

よって，

$$
\begin{aligned}
S&=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{h\left(\frac{1}{3}\right)-h(x)\right\}dx\\
&=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{h\left(\frac{1}{3}\right)-f(x)-g(x)\right\}dx\\
&=\left[xh\left(\frac{1}{3}\right)-F(x)+F(1-x)\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\\
&=\frac{1}{3}h\left(\frac{1}{3}\right)+2\left\{F\left(\frac{1}{3}\right)-F\left(\frac{2}{3}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\alpha-\beta\right)+2\left\{\left(-\frac{1}{18}\beta-\frac{1}{36}\right)-\left(\frac{2}{9}\alpha-\frac{2}{9}\beta-\frac{1}{9}\right)\right\}\\
&=-\frac{2}{9}\alpha+\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$
……(答)