

【1】

【解答】

(1)	(i)	ア	イ
		$0 < a < 4$	$-8a^2 + 32a$
	(ii)	ウ	エ
		2	7
(2)	(i)	オ	
		$\frac{1}{56}$	
	(ii)	カ	キ
		$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{9}$

【解説】

(1)(i)
2 次方程式 $x^2 + 2ax + 3a^2 - 8a = 0$ の判別式を D とおく。このとき、放物線 C が x 軸と異なる 2 点で交わるための必要十分条件は、 $D > 0$ となることである。よって、 a の取りうる値の範囲は

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 1 \cdot (3a^2 - 8a) &> 0 \\ \Leftrightarrow -2a^2 + 8a &> 0 \\ \Leftrightarrow 2a(a - 4) &< 0 \\ \therefore 0 < a < 4 \end{aligned}$$

である。ここで、2 次方程式 $x^2 + 2ax + 3a^2 - 8a = 0$ の 2 つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、これらは判別式 D を用いて

$$\alpha = -a - \sqrt{\frac{D}{4}}, \beta = -a + \sqrt{\frac{D}{4}}$$

と表される。また、 $PQ = \beta - \alpha$ であるから

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\beta - \alpha)^2 \\ &= \left\{ \left(-a + \sqrt{\frac{D}{4}} \right) - \left(-a - \sqrt{\frac{D}{4}} \right) \right\}^2 \\ &= 4 \cdot \frac{D}{4} \\ &= 4(-2a^2 + 8a) \\ &= -8a^2 + 32a \end{aligned}$$

となる。

(ii)

$PQ > 0$ より、 PQ^2 が最大となるとき PQ も最大となる。(1)(i)より

$$PQ^2 = -8(a - 2)^2 + 32$$

であるから、 PQ は $a = 2$ のとき最大値をとる。このとき、放物線 C の方程式は

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2 \cdot 2x + 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow y &= x^2 + 4x - 4 \end{aligned}$$

となる。ここで、放物線 C を、 x 軸方向に 3、 y 軸方向に b だけ平行移動した放物線が原点を通るとする。平行移動した放物線の方程式は

$$y - b = (x - 3)^2 + 4(x - 3) - 4$$

と表される。この放物線は原点を通るから、 $x = 0, y = 0$ を代入して

$$\begin{aligned} -b &= (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 4 \\ \therefore b &= 7 \end{aligned}$$

と求められる。

(2)(i)

以下、8 個の玉を全て区別して考える。3 個の玉の取り出し方は全部で ${}_8C_3 = 56$ (通り) 存在し、これらは同様に確からしい。ここで、 $X = 4$ となるのは、2 が書かれた白玉を 2 個、1 が書かれた赤玉を 1 個取り出す場合のみで、これは 1 通りである。よって、 $X = 4$ となる確率は

$$\frac{1}{56}$$

である。

(ii)

$X = 2$ となるのは、次の 2 つの場合が考えられる。以下、それぞれの確率について場合分けして考える。

[1] 1 が書かれた白玉、2 が書かれた白玉、1 が書かれた赤玉を 1 個ずつ取り出すとき

1 が書かれた白玉、2 が書かれた白玉の選び方がそれぞれ 2 通りあるため、この確率は

$$\frac{2^2}{56} = \frac{1}{14}$$

となる。

[2] 3 個とも白玉を取り出し、2 が書かれた白玉が少なくとも 1 個含まれるとき

3 個とも白玉を取り出すような取り出し方は ${}_6C_3$ (通り) である。このうち、2 が書かれた白玉が含まれないような取り出し方は、0, 1 が書かれた白玉の合計 4 個から 3 個取り出す場合を考えて、 ${}_4C_3$ (通り) である。よって、この確率は

$$\frac{{}_6C_3 - {}_4C_3}{56} = \frac{20 - 4}{56} = \frac{2}{7}$$

となる。

以上、[1], [2] は互いに排反であるから、 $X = 2$ となる確率は

$$\frac{1}{14} + \frac{2}{7} = \frac{5}{14}$$

である。ここで、赤玉を少なくとも 1 個取り出す確率は、3 個とも白玉を取り出す場合の余事象を考えて

$$1 - \frac{{}_6C_3}{56} = \frac{9}{14}$$

となる。また、赤玉を少なくとも 1 個取り出し、かつ $X = 2$ となる確率は、[1] で求めた $\frac{1}{14}$ である。したがって、赤玉を少なくとも 1 個取り出したとき、 $X = 2$ となる条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{14}}{\frac{9}{14}} = \frac{1}{9}$$

である。

【2】

【解答】

(1)	(i)	ア	イ
		(1, 3)	$(x+1)^2+(y-7)^2-10$
	(ii)	ウ	エ
		0	20
(2)	(i)	オ	カ
		-2	$\frac{\sqrt{26}}{4}$
	(ii)	キ	
		$\frac{5}{4}$	

【解説】

(1)(i)

円 C の中心の座標を (p, q) , 半径を $r(>0)$ とおくと、円 C の方程式は

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

とおける。いま、円 C は3点 O, A, B を通るから、

$$\begin{cases} (-2-p)^2+(4-q)^2=r^2 \\ (2-p)^2+(6-q)^2=r^2 \\ (0-p)^2+(0-q)^2=r^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p^2+4p+q^2-8q+20=r^2 & \cdots \textcircled{1} \\ p^2-4p+q^2-12q+40=r^2 & \cdots \textcircled{2} \\ p^2+q^2=r^2 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。①-③および②-③より、

$$\begin{cases} 4p-8q+20=0 \\ -4p-12q+40=0 \end{cases}$$

であり、これを解くと、

$$p=1, q=3$$

と求まり、これを③に代入すると、

$$1^2+3^2=r^2$$

$$\therefore r=\sqrt{10} \left(\because r>0 \right)$$

が得られる。したがって、円 C の中心の座標は $(1, 3)$ である。また、円 K の中心の座標を

(s, t) とおき、円 C 、円 K の中心をそれぞれ C', K' とおくと、

$$K'A=C'A=\sqrt{10}$$

$$K'B=C'B=\sqrt{10}$$

より四角形 $AC'BK'$ はひし形である。したがって、対角線 AB と $C'K'$ の中点は一致するから、

$$\begin{cases} \frac{-2+2}{2}=\frac{1+s}{2} \\ \frac{4+6}{2}=\frac{3+t}{2} \end{cases}$$

$$\therefore (s, t)=(-1, 7)$$

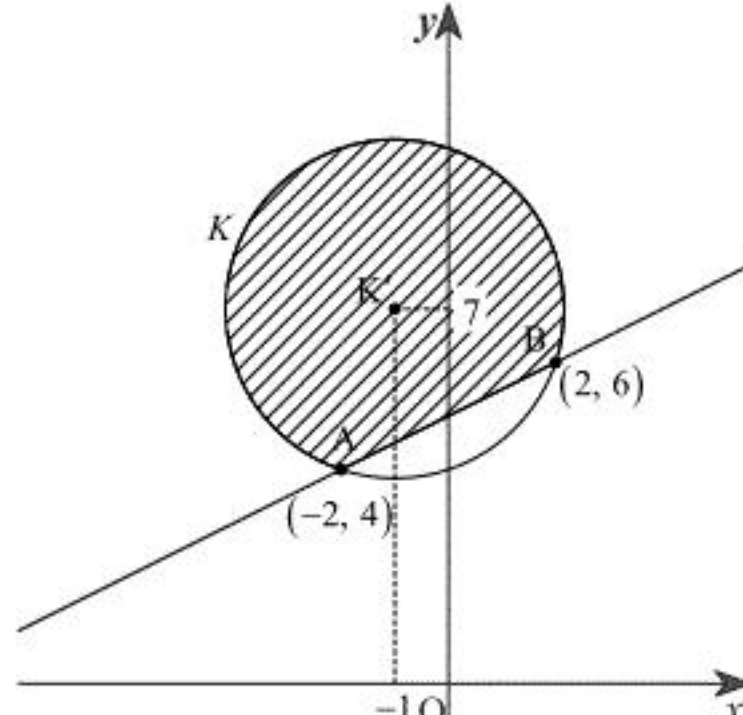
と求まる。以上より、円 K の中心の座標は $(-1, 7)$ であり、半径は円 C と等しく $\sqrt{10}$ であるから、円 K の方程式は

$$(x+1)^2+(y-7)^2=10 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-7)^2-10=0$$

である。

(ii)

$K'A=K'B=\sqrt{10}$ より、円 K は A, B を通る。これと(i)の結果より、領域 D を図示すると下図の斜線部分のようになる。ただし、境界を含む。



いま、実数 k を用いて $y-3x=k$ とおくと、この方程式は座標平面上において、傾き3、 y 切片 k の直線を表す。 $y-3x=k$ を満たす (x, y) が領域 D 内に存在することと、領域 D と直線 $y-3x=k$ が共有点をもつことは同値であり、この条件を満たすような k の値の範囲を考える。直線 $y-3x=k$ が円 K に接するのは、直線 $y-3x=k$ と点 $K'(-1, 7)$ の距離が $\sqrt{10}$ となるときの、すなわち

$$\begin{aligned} \frac{|(-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 7 - k|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}} &= \sqrt{10} \\ \Leftrightarrow |10 - k| &= 10 \\ \therefore k &= 0, 20 \end{aligned}$$

のときである。また、直線 $y-3x=k$ が点 $B(2, 6)$ を通る場合を考えると、

$$\begin{aligned} k &= 6 - 3 \cdot 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 $k=0$ のとき点 B で直線 $y-3x=k$ が円 K と接し、 $k=20$ のとき第2象限で直線 $y-3x=k$ が円 K と接する。以上より、 $y-3x$ の最小値は0、最大値は20である。

(2)(i)

問題文の条件から、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle AOB \\ &= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= -2 \end{aligned}$$

である。また、 $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ と表せるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}|^2 &= \left| \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{9}{16}|\vec{a}|^2 + \frac{3}{8}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{16}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{9}{16} \cdot 4 + \frac{3}{8} \cdot (-2) + \frac{1}{16} \cdot 2 \\ &= \frac{13}{8} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} OC &= \sqrt{\frac{13}{8}} \\ &= \frac{\sqrt{26}}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

(ii)

点 H は直線 OA 上の点であるから、実数 k を用いて $\overrightarrow{OH} = k\vec{a}$ とおける。いま、直線 CH と直線 OA は垂直であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ k\vec{a} - \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \right) \right\} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(k - \frac{3}{4} \right) |\vec{a}|^2 - \frac{1}{4} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4k - \frac{5}{2} &= 0 \\ \therefore k &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

と得られる。したがって、

$$\begin{aligned} OH &= \frac{5}{8} OA \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

である。

【3】

(1)

$$f'(x)=3x^2+2ax-a^2 \text{ より,}$$

$$f'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-a)(x+a)=0$$

$$\therefore x=\frac{a}{3}, -a$$

となる。したがって $a>0$ から、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$3a^3$	$\searrow$	$\frac{49}{27}a^3$	$\nearrow$

よって、 $f(x)$ の極値は極大値の $3a^3$ ($x=-a$ のとき) と極小値の $\frac{49}{27}a^3$ ($x=\frac{a}{3}$ のとき) である。

(答) 極大値: $3a^3$ ($x=-a$ のとき), 極小値: $\frac{49}{27}a^3$ ($x=\frac{a}{3}$ のとき)

(2)

$$f(a)=3a^3$$

$$f'(a)=4a^2$$

であるから、接線 ℓ の方程式を求めると、

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$\Leftrightarrow y-3a^3=4a^2(x-a)$$

$$\therefore y=4a^2x-a^3$$

となる。

(答) $\ell: y=4a^2x-a^3$

(3)

$$y=3(x-2a)^2 \text{ に } (x, y)=(a, 3a^3) \text{ を代入すると,}$$

$$3a^3=3(a-2a)^2$$

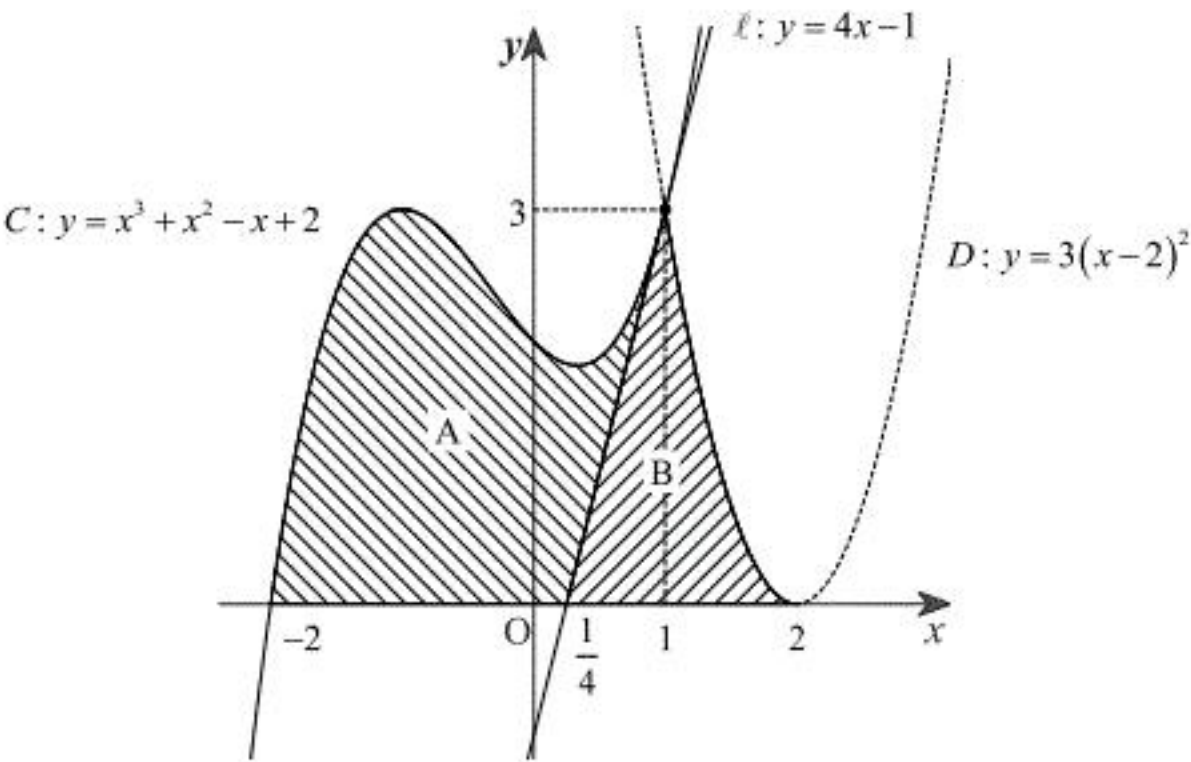
$$\Leftrightarrow 3a^3=3a^2$$

$$\therefore a=1 (\because a>0)$$

となる。

(答) $a=1$

(4)



(1)～(3)よりグラフの位置関係は上図のようになる。また、Aの網掛け部分の面積が S 、Bの網掛け部分の面積が T となる。したがって、 S は $f(x)$ の定積分と三角形の面積を考えて、

$$S=\int_{-2}^1\left(x^3+x^2-x+2\right) d x-\frac{1}{2} \cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) \cdot 3$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2 x\right]_{-2}^1-\frac{9}{8}$$

$$=\frac{27}{4}-\frac{9}{8}$$

$$=\frac{45}{8}$$

となる。 T についても $3(x-2)^2$ の定積分と三角形の面積を考えて、

$$T=\int_1^2 3(x-2)^2 d x+\frac{1}{2} \cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) \cdot 3$$

$$=\int_1^2\left(3 x^2-12 x+12\right) d x+\frac{9}{8}$$

$$=\left[x^3-6 x^2+12 x\right]_1^2+\frac{9}{8}$$

$$=1+\frac{9}{8}$$

$$=\frac{17}{8}$$

となる。

(答) $S=\frac{45}{8}, T=\frac{17}{8}$