

【1】

【解答】

(1)	(i)	ア	イ
		$-2-2\sqrt{2} < a < -2+2\sqrt{2}$	-2
	(ii)	ウ	エ
		$-2-2\sqrt{2} < a \leq \frac{-3-\sqrt{15}}{2}$	-4
(2)	(i)	オ	カ
		$\frac{7}{216}$	$\frac{37}{216}$
	(ii)	キ	
		$\frac{18}{37}$	

【解説】

(1)(i)

二次方程式 $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a - 4 = 0$ の判別式を D とすると、求める条件は

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - (2a^2 + 4a - 4) &> 0 \\ \therefore -2 - 2\sqrt{2} < a < -2 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。また、放物線 C が全ての象限を通る条件は、 C と y 軸の交点の y 座標が負であることである。このことから、 a の範囲は

$$\begin{aligned} 2a^2 + 4a - 4 &< 0 \\ \Leftrightarrow -1 - \sqrt{3} < a < -1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

と求められ、この範囲の中で最小となる整数 a の値は

$$-3 = -1 - 2 < -1 - \sqrt{3} < -2$$

より -2 である。

(ii)

$f(x) = x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a - 4$ とおくと、2点 A, B の x 座標がともに1以上となるのは、次の [1], [2], [3] が同時に成り立つときである。

[1] $f(1) \geq 0$

このとき a の値の範囲は、

$$\begin{aligned} 2a^2 + 6a - 3 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a \leq \frac{-3 - \sqrt{15}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{15}}{2} \leq a \end{aligned}$$

と求められる。

[2] C の軸が $x > 1$ の範囲にある

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a - 4 \\ &= (x + a)^2 + a^2 + 4a - 4 \end{aligned}$$

と書けることから軸は直線 $x = -a$ であり、このことから a の値の範囲は、

$$\begin{aligned} -a &> 1 \\ \Leftrightarrow a &< -1 \end{aligned}$$

と求められる。

[3] $D > 0$

これを満たす a の値の範囲は (i) より、 $-2 - 2\sqrt{2} < a < -2 + 2\sqrt{2}$ である。

以上のことから、求める a の値の範囲は $-2 - 2\sqrt{2} < a \leq \frac{-3 - \sqrt{15}}{2}$ である。このとき、AB の長さは $\sqrt{D}$ で表されることから $D > 0$ より

$$\begin{aligned} \sqrt{4(-a^2 - 4a + 4)} &= 4 \\ \Leftrightarrow -a^2 - 4a + 4 &= 4 \\ \Leftrightarrow a &= -4, 0 \end{aligned}$$

である。ここで、

$$-2 - 2\sqrt{2} < -4 < \frac{-3 - 4}{2} < \frac{-3 - \sqrt{15}}{2} < 0$$

であることから、 $a = -4$ のみ条件を満たす。よって求める a の値は、 $a = -4$ である。

(2)(i)

$M = 2$ となる確率は、3個のさいころの目がすべて1または2である確率から3個のさいころの目がすべて1である確率を引けばよいから、

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{7}{216}$$

と求められる。また、 $M = 4$ となる確率は、3個のさいころの目がすべて4以下である確率から3個のさいころの目がすべて3以下である確率を引けばよいから、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{37}{216}$$

と求められる。

(ii)

$M = 4$ のとき、少なくとも1個のさいころが4の目であり、問題文の条件から少なくとも1個のさいころが1の目である。3個のさいころの目の最大値が4であることを考慮すると、3個のさいころの目を大きいものから順に並べたものは

$$(4, 4, 1), (4, 3, 1), (4, 2, 1), (4, 1, 1)$$

のいずれかとなる。またそれぞれに対してさいころの区別を考えると、 $(4, 4, 1), (4, 1, 1)$ のとき3通り、 $(4, 3, 1), (4, 2, 1)$ のとき6通り存在することから、求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{3 \cdot 2 + 6 \cdot 2}{216}}{\frac{37}{216}} = \frac{18}{37}$$

と求められる。

【2】

【解答】

(1)	(i)	ア	イ
		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(0,-\sqrt{3})$
	(ii)	ウ	
		$2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$	
(2)	(i)	エ	オ
		$41-2n$	1300
	(ii)	カ	キ
		$-2n^2+39n$	325

【解説】

(1)(i)

$$x^2+y^2+2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=4$$

より、円 C は点 $(-1, 0)$ を中心とする半径 2 の円である。また、直線 ℓ は点 $A(3, 0)$ を通る傾き m の直線であるから、直線 ℓ の方程式は

$$y=m(x-3)$$

$$\Leftrightarrow mx-y-3m=0$$

である。よって、円 C と直線 ℓ が接するとき、点と直線の距離の公式より

$$\frac{|m\cdot(-1)-0-3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$\Leftrightarrow 4m=2\sqrt{m^2+1}$$

となり、この両辺を 2 乗すると、

$$16m^2=4(m^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 3m^2=1$$

$$\therefore m=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\because m>0\right)$$

となる。また、このとき直線 ℓ の方程式は

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3)$$

であるから、これを円 C の方程式に代入すると、

$$x^2+\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3)\right\}^2+2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}x^2=0$$

$$\therefore x=0$$

となり、これを直線 ℓ の方程式に再代入すると

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(0-3)\\&=-\sqrt{3}\end{aligned}$$

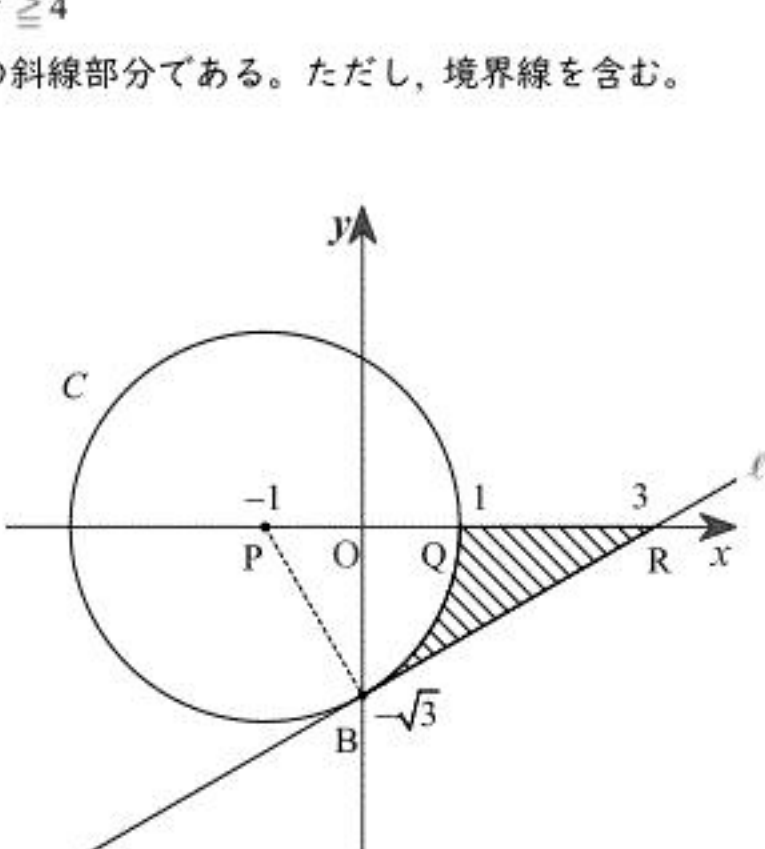
となる。以上より、点 B の座標は $(0,-\sqrt{3})$ である。

(ii)

$$x^2+y^2+2x-3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2\geq 4$$

より、領域 D は下図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。



よって、点 $P(-1, 0)$ 、 $Q(1, 0)$ 、 $R(3, 0)$ とすると、領域 D の面積は $\triangle PBR$ の面積から扇形 PBQ の面積を除いたものである。ここで、 $\triangle PBR$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\text{PR}\cdot\text{OB}&=\frac{1}{2}\cdot\{3-(-1)\}\cdot\sqrt{3}\\&=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。また、直線 BP の傾きは $-\sqrt{3}$ であるから、 $\angle\text{OPB}=\frac{\pi}{3}$ となる。よって、扇形 PBQ の

面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 2^2=\frac{2}{3}\pi$$

となる。以上より、領域 D の面積は $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$ である。

(2)(i)

等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を実数 c, d を用いて $a_n=c+nd$ ($n=1, 2, \cdots$) とする。このとき、

$a_2=37$ より、

$$a_2=37$$

$$\Leftrightarrow c+2d=37\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

であり、 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50}=-500$ より、

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50}=-500$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{50}(c+kd)=-500$$

$$\Leftrightarrow 50c+d\cdot\frac{1}{2}\cdot 50\cdot(50+1)=-500$$

$$\Leftrightarrow 2c+51d=-20\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

である。よって、 $\textcircled{2}-\textcircled{1}\times 2$ より

$$47d=-94$$

$$\therefore d=-2$$

となり、これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$c+2\cdot(-2)=37$$

$$\therefore c=41$$

となる。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=41-2n$ である。また、

$$a_n>0$$

$$\Leftrightarrow 41-2n>0$$

$$\therefore 20\geq n\quad(\because n\text{ は自然数})$$

であり、同様に考えると

$$a_n<0$$

$$\therefore n\geq 21\quad(\because n\text{ は自然数})$$

となる。よって、

$$a_1=41-2=39$$

$$a_{20}=41-2\cdot 20=1$$

$$a_{21}=41-2\cdot 21=-1$$

$$a_{50}=41-2\cdot 50=-59$$

であるから、

$$\begin{aligned}|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{50}|&=\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=21}^{50}(-a_k)\\&=\frac{1}{2}\cdot(39+1)\cdot 20-\frac{1}{2}\cdot(-1-59)\cdot 30\\&=1300\end{aligned}$$

となる。

(ii)

(2)(i)より、 $a_{2n}=41-2\cdot 2n=41-4n$ であるから、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_{2k}&=\frac{1}{2}\cdot(a_2+a_{2n})\cdot n\\&=\frac{1}{2}\cdot(37+41-4n)\cdot n\\&=-2n^2+39n\end{aligned}$$

となる。また、

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50}=-500$$

$$\Leftrightarrow (a_1+a_3+\cdots+a_{49})+(a_2+a_4+\cdots+a_{50})=-500$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{25}a_{2k-1}=-500-\sum_{k=1}^{25}a_{2k}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{25}a_{2k-1}-2\sum_{k=1}^{25}a_{2k}&=\left(-500-\sum_{k=1}^{25}a_{2k}\right)-2\sum_{k=1}^{25}a_{2k}\\&=-500-3\cdot(-2\cdot 25^2+39\cdot 25)\\&=325\end{aligned}$$

となる。

【3】

(1)

$p \neq 0$ より、2 点 $O(0, 0)$, $P(p, -p^2 - 2p)$ を通る直線 OP の方程式は

$$y = \frac{-p^2 - 2p}{p}x$$

$$\Leftrightarrow y = -(p+2)x \quad (\because p \neq 0)$$

となる。また、 $C: y = -x^2 - 2x$ について $y' = -2x - 2$ であるから、点 $P(p, -p^2 - 2p)$ における

放物線 C の接線 ℓ の方程式は

$$y - (-p^2 - 2p) = (-2p - 2)(x - p)$$

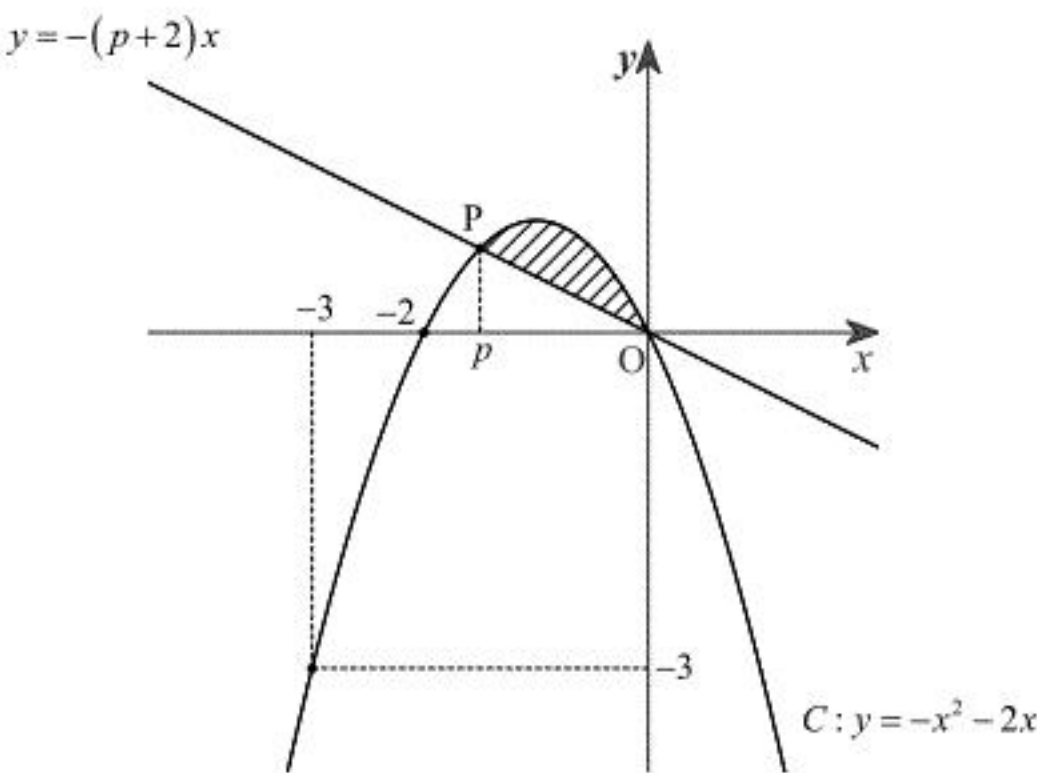
$$\Leftrightarrow y = -2(p+1)x + p^2$$

となる。

(答) 直線 OP : $y = -(p+2)x$, 接線 ℓ : $y = -2(p+1)x + p^2$

(2)

$-3 < p < 0$ より、 S は下図の斜線部分の面積である。



よって、

$$S = \int_p^0 [(-x^2 - 2x) - \{-(p+2)x\}] dx$$

$$= \int_p^0 x(p-x) dx$$

$$= \frac{1}{6}(0-p)^3$$

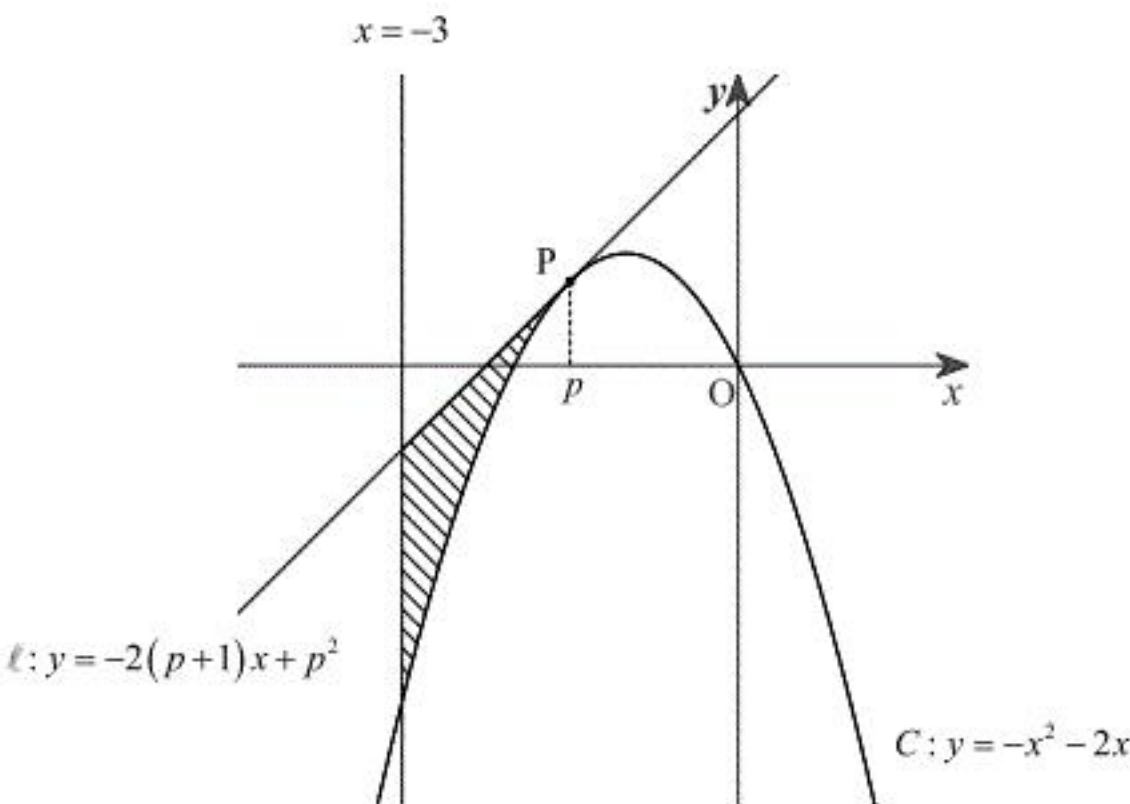
$$= -\frac{1}{6}p^3$$

と表せる。

(答) $S = -\frac{1}{6}p^3$

(3)

$-3 < p < 0$ より、 T は下図の斜線部分の面積である。



よって、

$$T = \int_{-3}^p [-2(p+1)x + p^2] - (-x^2 - 2x) dx$$

$$= \int_{-3}^p (x^2 - 2px + p^2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - px^2 + p^2x \right]_{-3}^p$$

$$= \frac{1}{3}p^3 + 3p^2 + 9p + 9$$

と表せる。したがって、(2)の結果と合わせると

$$S+T = -\frac{1}{6}p^3 + \left(\frac{1}{3}p^3 + 3p^2 + 9p + 9 \right)$$

$$= \frac{1}{6}p^3 + 3p^2 + 9p + 9$$

となる。ここで、 $f(p) = \frac{1}{6}p^3 + 3p^2 + 9p + 9$ ($-3 < p < 0$) とすると、

$$f'(p) = \frac{1}{2}p^2 + 6p + 9$$

$$= \frac{1}{2} \{ p - (-6 - 3\sqrt{2}) \} \{ p - (-6 + 3\sqrt{2}) \}$$

となる。このとき、 $4 = \sqrt{16} < 3\sqrt{2} = \sqrt{18} < 5 = \sqrt{25}$ より

$$-11 < -6 - 3\sqrt{2} < -10$$

$$-2 < -6 + 3\sqrt{2} < -1$$

であるから、 $f(p)$ の増減は下表の通りである。

p	(-3)	$\cdots$	$-6+3\sqrt{2}$	$\cdots$	(0)
$f'(p)$		$-$	0	$+$	
$f(p)$		$\searrow$	(極小値)	$\nearrow$	

以上より、 $f(p)$ 、すなわち $S+T$ が最小となる p の値は $p = -6 + 3\sqrt{2}$ である。

(答) $p = -6 + 3\sqrt{2}$