

【1】

〔解答〕

(1)	ア		
	$\frac{3}{55}$		
(2)	イ	ウ	
	$X^2+2X-8-\frac{16}{X}$	$\frac{3}{2}$	
(3)	エ	オ	カ
	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{2}$
(4)	キ	ク	
	$3i$	2	

〔解説〕

(1)

2本のくじの引き方は全部で ${}_{11}C_2=55$ (通り)存在し、これらは同様に確からしい。このうち、2本とも当たりくじであるような引き方は ${}_3C_2=3$ (通り)である。したがって、求める確率は

$\frac{3}{55}$ である。

(2)

$2^x=X$ とおくとき、 $4^x+2^{x+1}-8-16\cdot 2^{-x}$ を X の式で表すと

$$\begin{aligned} 4^x+2^{x+1}-8-16\cdot 2^{-x} &= \left(2^x\right)^2+2\cdot 2^x-8-\frac{16}{2^x} \\ &= X^2+2X-8-\frac{16}{X} \end{aligned}$$

となる。また、 $X>0$ であるから、 $4^x+2^{x+1}-8-16\cdot 2^{-x}=0$ が満たされるとき

$$\begin{aligned} X^2+2X-8-\frac{16}{X} &= 0 \\ \Leftrightarrow X^3+2X^2-8X-16 &= 0 \quad (\because X>0) \\ \Leftrightarrow (X+2)(X^2-8) &= 0 \\ \Leftrightarrow (X+2)(X+2\sqrt{2})(X-2\sqrt{2}) &= 0 \\ \therefore X=2\sqrt{2} \quad (\because X>0) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $4^x+2^{x+1}-8-16\cdot 2^{-x}=0$ を満たす x の値は

$$\begin{aligned} 2^x &= 2\sqrt{2} \\ \therefore x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。

(3)

与えられた等式を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{3x^2-2x+4}{(x+1)(x-1)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2-2x+4}{(x+1)(x-1)^2} &= \frac{A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2-2x+4}{(x+1)(x-1)^2} &= \frac{A(x^2-2x+1)+B(x^2-1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2-2x+4}{(x+1)(x-1)^2} &= \frac{(A+B)x^2+(-2A+C)x+(A-B+C)}{(x+1)(x-1)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、両辺の分母は等しいから、両辺の分子について

$$3x^2-2x+4=(A+B)x^2+(-2A+C)x+(A-B+C)$$

が恒等式となればよい。よって、 A, B, C は

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A+C=-2 \\ A-B+C=4 \end{cases}$$

を満たし、これを解くと

$$A=\frac{9}{4}, B=\frac{3}{4}, C=\frac{5}{2}$$

となる。

(4)

点 z は原点を中心とする半径1の円上を動くから

$$|z|=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。また、 $w=i(2z+3)$ より

$$\begin{aligned} iw &= -2z-3 \\ \Leftrightarrow 2z &= -iw-3 \\ \Leftrightarrow z &= \frac{-iw-3}{2} \end{aligned}$$

である。これを①に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \left|\frac{-iw-3}{2}\right| &= 1 \\ \Leftrightarrow \left|-\frac{i}{2}(w-3i)\right| &= 1 \\ \Leftrightarrow \left|-\frac{i}{2}\right||w-3i| &= 1 \\ \Leftrightarrow |w-3i| &= 2 \end{aligned}$$

となる。したがって、 w は点 $3i$ を中心とする半径2の円をえがく。

【2】

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ
	$\frac{5}{6}$	307	3	$\frac{m}{2}$
(2)	オ			
	$\frac{m(m+1)}{4}$			
(3)	カ			
	90			
(4)	キ	ク		
	$\frac{5}{4}$	22		

〔解説〕

(1)

初項から第4群の最後の項までの項の個数は、

$$1+2+3+4=10 \text{ (個)}$$

であり、第5群は、

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$$

であるため、第15項は $\frac{5}{6}$ である。ここで、 $\frac{7}{26}$ は第25群の7番目の項であり、第 m 群には

$\frac{1}{m+1}, \frac{2}{m+1}, \dots, \frac{m}{m+1}$ の m 個の項が属する。よって、初項から第24群の最後の項までの項数は、

$$\sum_{k=1}^{24} k = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (24+1) = 300 \text{ (項)}$$

であるため、 $\frac{7}{26}$ は第307項である。また、第6群は、

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$$

であるため、第6群に属するすべての項の和は、

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

である。さらに、第 m 群に属するすべての項の和は、

$$\sum_{k=1}^m \frac{k}{m+1} = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{2} m(m+1) = \frac{m}{2}$$

である。

(2)

(1)より、第 m 群に属するすべての項の和は $\frac{m}{2}$ であるため、求める和 S_m は、

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{k=1}^m \frac{k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m(m+1) \\ &= \frac{m(m+1)}{4} \end{aligned}$$

である。

(3)

(2)より、 S_m は m に関して単調増加である。よって、第 n 項が第 m 群に属するとすると、初項から第 n 項までの数列の和が初めて2025をこえるとき、 m は

$$\begin{aligned} 2025 &< \frac{m(m+1)}{4} \\ \Leftrightarrow 90^2 &< m(m+1) \end{aligned}$$

を満たす最小の自然数である。ここで、 $m=89$ のとき(右辺) $=89 \cdot 90$ より成立せず、 $m=90$ のとき(右辺) $=90 \cdot 91$ より成立する。したがって、第 n 項は第90群に属する。

(4)

第7群は、

$$\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$$

であり、そのうち、 $\frac{1}{2}$ 以下の項は $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}$ であるため、求める和 U_7 は、

$$U_7 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{4}$$

となる。また、 U_m について、 m の偶奇で場合分けをして考える。

[1] m が奇数のとき

$n = \frac{m+1}{2}$ とすると、 n は自然数であり、 $m=2n-1$ である。また、第 m 群のうち値が $\frac{1}{2}$ 以下

の項は、

$$\frac{1}{m+1}, \frac{2}{m+1}, \dots, \frac{n}{m+1}$$

であるため、

$$\begin{aligned} U_m &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \left(\frac{m+1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{m+3}{8} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} U_m &< 3 \\ \Leftrightarrow \frac{m+3}{8} &< 3 \\ \Leftrightarrow m &< 21 \end{aligned}$$

より、 $U_m < 3$ となる奇数 m の最大値は19である。

[2] m が偶数のとき

$n = \frac{m}{2}$ とすると、 n は自然数であり、 $m=2n$ である。また、第 m 群のうち値が $\frac{1}{2}$ 以下の項

は、

$$\frac{1}{m+1}, \frac{2}{m+1}, \dots, \frac{n}{m+1}$$

であるため、

$$\begin{aligned} U_m &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{m}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{m^2 + 2m}{8(m+1)} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} U_m &< 3 \\ \Leftrightarrow \frac{m^2 + 2m}{8(m+1)} &< 3 \\ \Leftrightarrow m^2 + 2m &< 24(m+1) \\ \Leftrightarrow m^2 - 22m - 24 &< 0 \\ \Leftrightarrow 11 - \sqrt{145} &< m < 11 + \sqrt{145} \end{aligned}$$

となる。また、 $12 = \sqrt{144} < \sqrt{145} < \sqrt{169} = 13$ より、

$$11 - \sqrt{145} < 0, 23 < 11 + \sqrt{145} < 24$$

である。よって、 $U_m < 3$ となる偶数 m の最大値は22である。

以上、[1], [2]より、 $U_m < 3$ となる m の最大値は22である。

【3】

【解答】

(1)	ア	イ	ウ
	2	4	8
(2)	エ	オ	カ
	$x + \sin 2x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
(3)	キ	ク	
	$4\sin x - \frac{8}{3}\sin^3 x$	$\frac{4\sqrt{2}-4}{3}$	

【解説】

(1)

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\begin{aligned}\sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x \\ &= \sin x(3 - 4\sin^2 x) \\ &= \sin x(4\cos^2 x - 1) \quad (\because \sin^2 x = 1 - \cos^2 x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 4x &= 2\sin 2x \cos 2x \\ &= 2 \cdot 2\sin x \cos x \cdot (2\cos^2 x - 1) \\ &= \sin x(8\cos^3 x - 4\cos x)\end{aligned}$$

であるから、 $f_2(x) = 2\cos x$, $f_3(x) = 4\cos^2 x - 1$, $f_4(x) = 8\cos^3 x - 4\cos x$ となる。

(2)

$$\begin{aligned}\int f_3(x) dx &= \int \left(4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - 1 \right) dx \quad (\because \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}) \\ &= \int (1 + 2\cos 2x) dx \\ &= x + \sin 2x + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

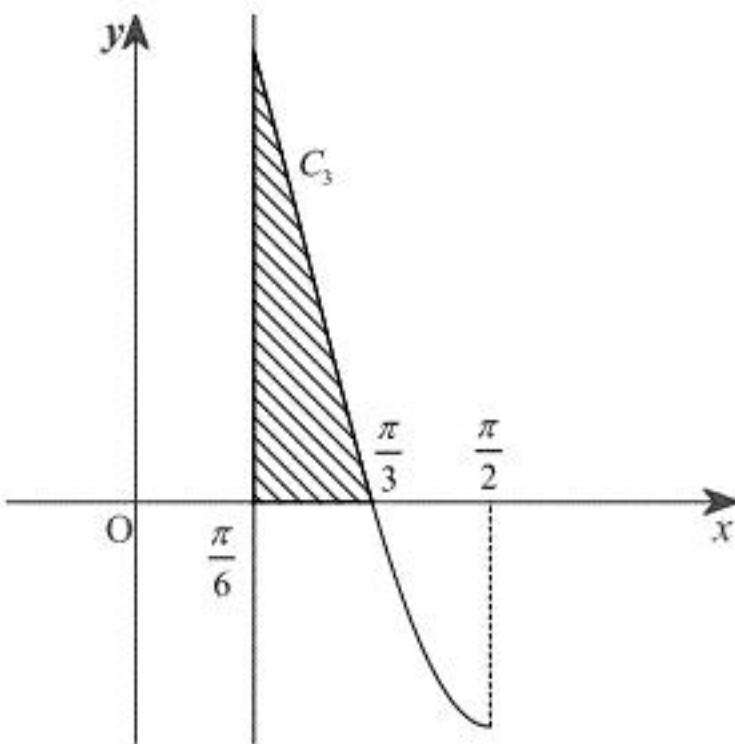
である。また、

$$f_3(x) = 4\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$$

であるから、曲線 C_3 と x 軸の交点の座標は $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ である。さらに、 $\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{3}$ で $f_3(x) > 0$,

$\frac{\pi}{3} < x \leq \frac{\pi}{2}$ で $f_3(x) < 0$ より、 x 軸との上下関係に注目して曲線 C_3 を描くと、求める面積は下

図の斜線部の面積とわかる。



よって、面積は

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f_3(x) dx = \left[x + \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6}$$

である。

(3)

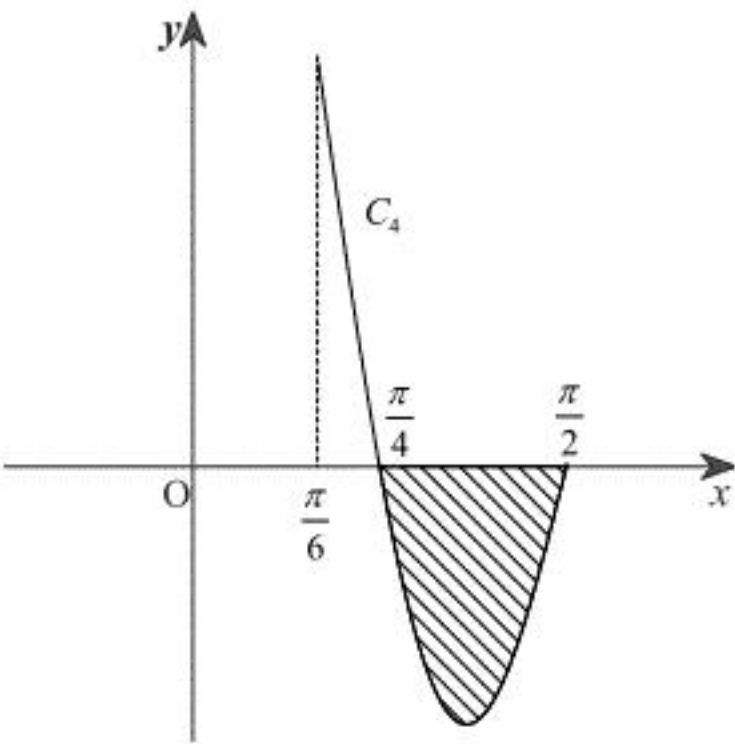
$$\begin{aligned}\int f_4(x) dx &= \int \cos x(8\cos^2 x - 4) dx \\ &= \int \cos x(4 - 8\sin^2 x) dx \quad (\because \cos^2 x = 1 - \sin^2 x) \\ &= \int (\sin x)'(4 - 8\sin^2 x) dx \\ &= 4\sin x - \frac{8}{3}\sin^3 x + C' \quad (C' \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

である。また、

$$f_4(x) = 8\cos x\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

である。 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ で $f_4(x) = 0$, $\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{4}$ で $f_4(x) > 0$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ で $f_4(x) < 0$ より、 x 軸と

の上下関係に注目して曲線 C_4 を描くと、求める面積は下図の斜線部の面積とわかる。



よって、面積は

$$\begin{aligned}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f_4(x) dx &= -\left[4\sin x - \frac{8}{3}\sin^3 x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\left(4 - \frac{8}{3} \right) + \left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{2}-4}{3}\end{aligned}$$

である。

