

【1】

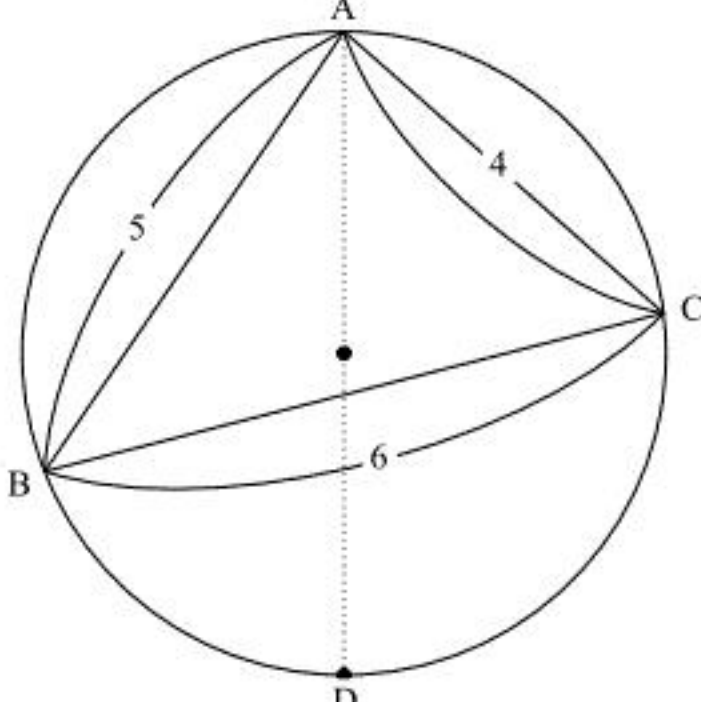
【解答】

(1)	(i)	ア	イ	ウ
		$\frac{1}{8}$	$\frac{15\sqrt{7}}{4}$	$\frac{16\sqrt{7}}{7}$
	(ii)	エ		
(2)	(i)	6		
		エ	オ	
	(i)	$\frac{1}{35}$	$\frac{19}{35}$	
(2)	(ii)	カ		
		$\frac{3}{4}$		

【解説】

(1)(i)

問題文の条件を図示すると以下のようになる。



$\triangle ABC$ について余弦定理を用いると、

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \angle BAC$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \\ &= \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \angle BAC < \pi$ であることより $\sin \angle BAC > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin \angle BAC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{8^2}} \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{8}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} \\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

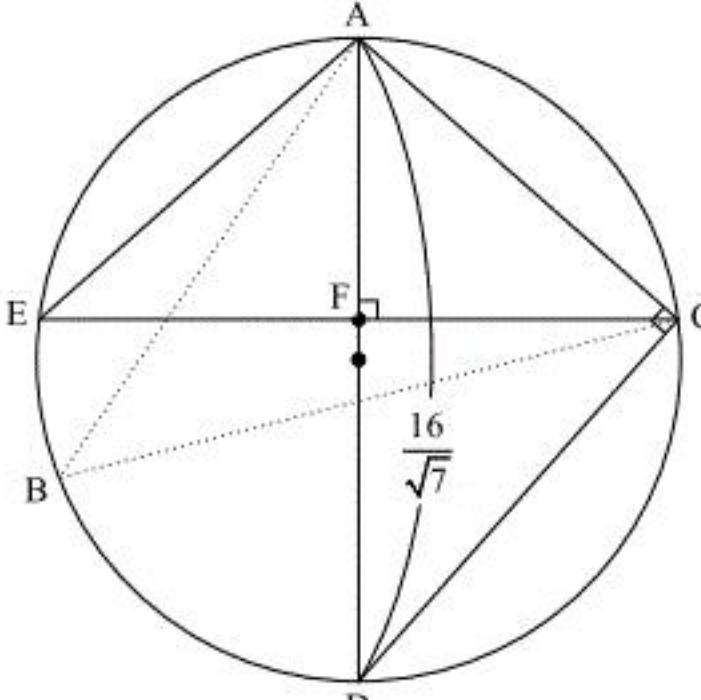
となる。さらに、線分 AD は円 O の直径であるから、 $\triangle ABC$ について正弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\sin \angle BAC} &= AD \\ \Leftrightarrow AD &= 6 \cdot \frac{8}{3\sqrt{7}} \\ \therefore AD &= \frac{16\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

となる。

(ii)

問題文の条件を図示すると以下のようになる。



円周角の定理より、 $\angle ACD = \frac{\pi}{2}$ である。また、 $AC = AE$ であることより、線分 AC と線分 AE は直線 AD に対して対称であるから、線分 AD と線分 CE の交点を点 F とすると、

$CE = 2CF$ 、 $\angle AFC = \frac{\pi}{2}$ が成立する。よって、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle AFC$ はそれぞれ $\angle ACD$ 、 $\angle AFC$ を直角とする直角三角形であり、さらにこれらは $\angle CAD$ 、 $\angle FAC$ を共通角としてもつから、 $\triangle ACD \sim \triangle AFC$ となる。したがって、

$$AD : DC = AC : CF \Leftrightarrow CF = \frac{DC \cdot AC}{AD}$$

となる。ここで、 $\angle ACD = \frac{\pi}{2}$ であることから、 $\triangle ACD$ について三平方の定理より

$$\begin{aligned}DC &= \sqrt{AD^2 - AC^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{16\sqrt{7}}{7}\right)^2 - 4^2} \\ &= \frac{12\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

となる。以上から、

$$\begin{aligned}CE &= 2 \cdot \frac{DC \cdot AC}{AD} \\ &= 2 \cdot \frac{\frac{12}{\sqrt{7}} \cdot 4}{\frac{16}{\sqrt{7}}} \\ &= 6\end{aligned}$$

となる。

(2)(i)

a, b, c と記された3枚のカードを袋から取り出すという取り出し方を $\{a, b, c\}$ と表し、2枚ある $\boxed{0}$ のカードを $0_A, 0_B$ と区別して考える。考えられる取り出し方の総数は、 ${}_7C_3 = 35$ (通り) であり、これらは同様に確からしい。このとき、 $X = 1$ となるような取り出し方は $\{0_A, 0_B, 1\}$ の1通りである。よって、 $X = 1$ である確率は $\frac{1}{35}$ である。また、 X が奇数となるのは、

- (a) 取り出したカードが3枚とも奇数のカード
(b) 取り出したカードのうち1枚だけが奇数のカード

のいずれかの場合である。(a)に当てはまる取り出し方は、 $\{1, 3, 5\}$ の1通りである。また、(b)に当てはまる取り出し方の数は、偶数のカードの中から2枚を選び、奇数のカードの中から1枚を選ぶ方法の数に等しい。ここで、袋の中には偶数のカードが4枚、奇数のカードが3枚入っているから、(b)に当てはまる取り出し方の数は

$${}_4C_2 \cdot {}_3C_1 = 18 \text{ (通り)}$$

である。(a)、(b)は互いに排反であるから、 X が奇数である確率は

$$\frac{1+18}{35} = \frac{19}{35}$$

となる。

(ii)

X が偶数であることは X が奇数であることの余事象であるから、 X が偶数であるような取り出し方の数は

$$35 - 19 = 16 \text{ (通り)}$$

である。ここで、 X が偶数かつ $X \geq 6$ でないとき、取り出し方は

$\{0_A, 0_B, 2\}$ 、 $\{0_A, 0_B, 4\}$ 、 $\{0_A, 1, 3\}$ 、 $\{0_B, 1, 3\}$ の計4通りである。よって、 X が偶数で $X \geq 6$ となるような取り出し方の数は

$$16 - 4 = 12 \text{ (通り)}$$

となる。以上から、 X が偶数であったとき、 $X \geq 6$ である条件付き確率は

$$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

である。

【2】

【解答】

(1)	(i)	$\overline{ア}$	$\overline{イ}$
		$2a+8$	$a\leq-3$
	(ii)	$\overline{ウ}$	
		$-4<a\leq-3$	
	(iii)	$\overline{エ}$	
		$-\frac{21}{4}$	
(2)	(i)	$\overline{オ}$	
		$(2, 1, 1)$	
	(ii)	$\overline{カ}$	$\overline{キ}$
		6	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$

【解説】

(1)(i)

x の方程式 $x^3+ax+b=0$ は実数解 $x=-2$ をもつため、

$$\begin{aligned}(-2)^3+a\cdot(-2)+b&=0\\ \therefore b&=2a+8\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}x^3+ax+b&=x^3+ax+2a+8\\&=(x+2)(x^2-2x+a+4)\end{aligned}$$

となり、 $f(x)=x^2-2x+a+4$ とするとき、 x の 2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}D&=(-2)^2-4\cdot 1\cdot (a+4)\\&=-4(a+3)\end{aligned}$$

となる。ここで、 x の方程式 $x^3+ax+b=0$ は実数解 $x=-2$ 、 p 、 q をもつため、 x の 2 次方程式 $f(x)=0$ は実数解 $x=p$ 、 q をもつ。したがって、 a の取りうる値の範囲は、

$$\begin{aligned}D&\geq 0\\ \therefore a&\leq -3\end{aligned}$$

である。

(ii)

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-2x+a+4\\&=(x-1)^2+a+3\end{aligned}$$

より、関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=1$ を軸、点 $(1, a+3)$ を頂点にもつ下に凸な放物線である。

また、 $f(0)=a+4$ 、 $f(1)=a+3$ である。さらに、 x の 2 次方程式 $f(x)=0$ は実数解

$x=p$ 、 q をもつため、 p 、 q がともに正であるとき、 a の取りうる値の範囲は、

$$\begin{aligned}&\begin{cases}f(0)>0\\f(1)\leq 0\end{cases}\\\Leftrightarrow &\begin{cases}a>-4\\a\leq -3\end{cases}\\\therefore &-4<a\leq -3\end{aligned}$$

である。

(iii)

x の 2 次方程式 $f(x)=0$ は実数解 $x=p$ 、 q をもつため、解と係数の関係より、

$$p+q=2, \quad pq=a+4$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}(|p|+|q|)^2&=p^2+q^2+2|pq|\\&=(p+q)^2-2pq+2|pq|\\&=2^2-2\cdot (a+4)+2|a+4|\\&=4-2(a+4)+2|a+4|\end{aligned}$$

である。以下、 a と -4 の大小関係により場合分けをする。

[1] $-4\leq a\leq -3$ のとき

$$|a+4|=a+4 \text{ となるため、}$$

$$(|p|+|q|)^2=4-2(a+4)+2(a+4)=4$$

である。よって、 $|p|+|q|\geq 0$ より、

$$|p|+|q|=\sqrt{4}=2\neq 3$$

となるため、条件に適さない。

[2] $a<-4$ のとき

$$|a+4|=-(a+4) \text{ となるため、}$$

$$\begin{aligned}(|p|+|q|)^2&=4-2(a+4)-2(a+4)\\&=-4(a+3)\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}|p|+|q|&=3\\\Leftrightarrow &(|p|+|q|)^2=9\ (\because |p|+|q|\geq 0)\\\Leftrightarrow &-4(a+3)=9\\\therefore &a=-\frac{21}{4}\end{aligned}$$

である。

以上、[1]、[2]より、求める値は $a=-\frac{21}{4}$ である。

(2)(i)

点 H は直線 ℓ 上の点であるため、実数 t を用いて $\overline{OH}=\overline{OA}+t\overline{d}$ と表すことができる。このとき、

$$\overline{OH}=(3, 0, 0)+t(-1, 1, 1)=(-t+3, t, t)$$

より、

$$\begin{aligned}|\overline{OH}|&=\sqrt{(-t+3)^2+t^2+t^2}\\&=\sqrt{3t^2-6t+9}\\&=\sqrt{3(t-1)^2+6}\end{aligned}$$

となる。また、点 H は直線 ℓ 上の点で、原点からの距離が最小となる点であるため、 $t=1$ と

なる。よって、

$$\overline{OH}=(-1+3, 1, 1)=(2, 1, 1)$$

となるため、点 H の座標は $(2, 1, 1)$ である。

(ii)

点 C を線分 OB の中点とすると、点 C の座標は $\left(0, 0, \frac{b}{2}\right)$ であり、2 点 O、B を直径の両端とす

る球面の中心である。また、 $b>0$ より、 $OC=\left|\frac{b}{2}\right|=\frac{b}{2}$ であり、(i)より、

$$CH^2=(0-2)^2+(0-1)^2+\left(\frac{b}{2}-1\right)^2=\frac{b^2-4b+24}{4}$$

となる。よって、点 H が 2 点 O、B を直径の両端とする球面上にあるとき、

$$\begin{aligned}OC&=CH\\\Leftrightarrow &OC^2=CH^2\\\Leftrightarrow &\frac{b^2}{4}=\frac{b^2-4b+24}{4}\\\therefore &b=6\end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\overline{OB}-\overline{OA}\\&=(0, 0, 6)-(3, 0, 0)\\&=(-3, 0, 6)\\\overline{AH}&=\overline{OH}-\overline{OA}\\&=(2, 1, 1)-(3, 0, 0)\\&=(-1, 1, 1)\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}|\overline{AB}|^2&=(-3)^2+0^2+6^2=45\\|\overline{AH}|^2&=(-1)^2+1^2+1^2=3\\\overline{AB}\cdot\overline{AH}&=(-3)\cdot(-1)+0\cdot 1+6\cdot 1=9\end{aligned}$$

となるため、 $\triangle ABH$ の面積は、

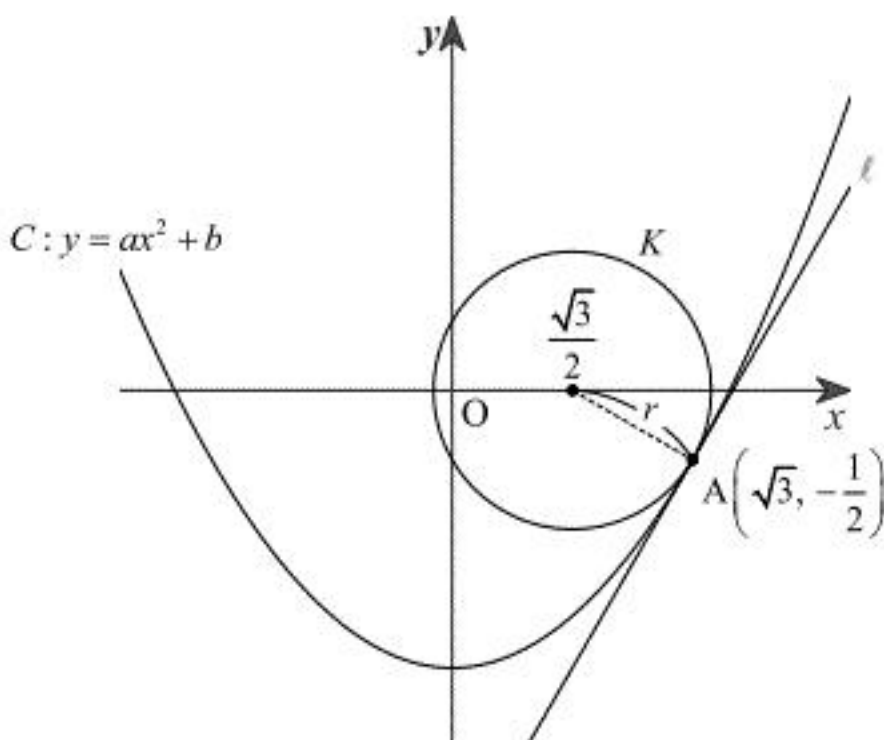
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\overline{AB}|^2|\overline{AH}|^2-(\overline{AB}\cdot\overline{AH})^2}&=\frac{1}{2}\sqrt{45\cdot 3-9^2}\\&=\frac{3\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

である。

[3]

(1)

円 K ，放物線 C ，直線 ℓ を座標平面上に図示すると下図のようになる。



上図より，2点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$ の間の距離は r に等しいから，

$$\begin{aligned} r^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)^2 + \left\{0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^2 \\ &\Leftrightarrow r^2 = 1 \\ &\therefore r = 1 \quad (\because r > 0) \end{aligned}$$

である。よって，円 K は中心が点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ で半径が1の円であるから，その方程式は，

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

である。直線 ℓ は円 K の点 $A\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$ における接線であるから，その方程式は，

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)y &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= \sqrt{3}x - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで，放物線 C の方程式を x で微分すると，

$$y' = 2ax$$

となる。直線 ℓ は放物線 C の点 $A\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$ における接線であるから，その傾きに注目して，

$$\begin{aligned} 2a \cdot \sqrt{3} &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

を得る。さらに，放物線 C は点 $A\left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$ を通るから，

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= a \cdot (\sqrt{3})^2 + b \\ \Leftrightarrow b &= -2 \quad \left(\because a = \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $r = 1, a = \frac{1}{2}, b = -2$

(2)

(1)より，直線 ℓ の方程式は $y = \sqrt{3}x - \frac{7}{2}$ である。

(答) $y = \sqrt{3}x - \frac{7}{2}$

(3)

(1)より，

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{\sqrt{3}} (ax^2 + b) dx &= \int_{-2}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_{-2}^{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{8}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。

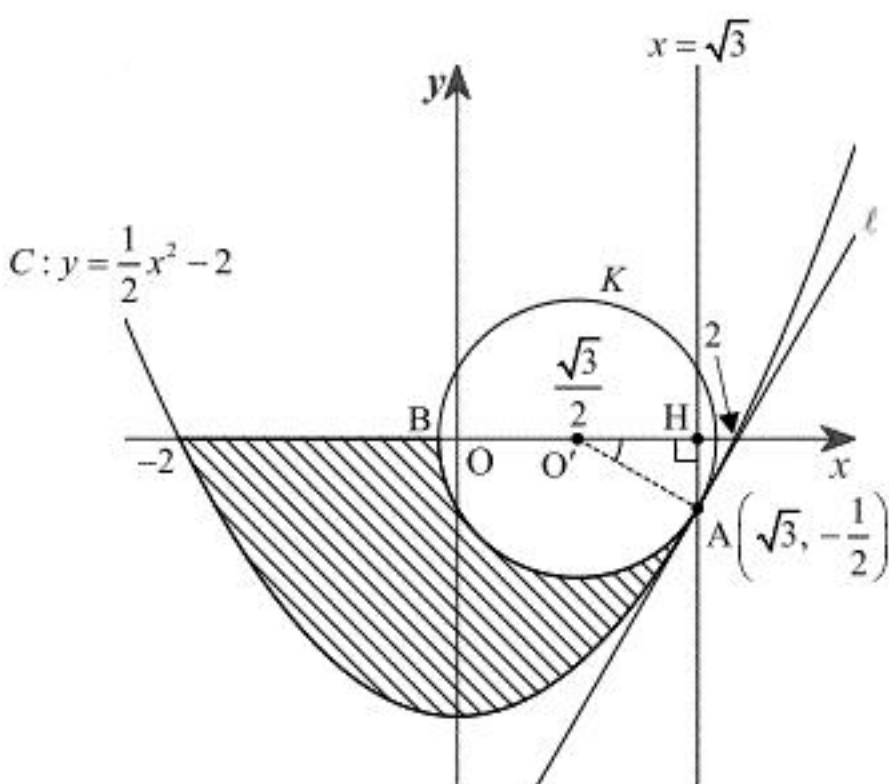
(答) $-\frac{8}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(4)

放物線 C と x 軸の共有点の x 座標は，

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}x^2 - 2 \\ \Leftrightarrow x &= \pm 2 \end{aligned}$$

である。よって，与えられた連立不等式の表す領域を座標平面上に図示すると，下図の斜線部となる。



また，上図のように円 K の中心を O' ，円 K と x 軸の $x < 0$ の部分との交点を B ，点 A から x 軸に下ろした垂線の足を H とおく。このとき，

$$\begin{aligned} \sin \angle AO'H &= \frac{AH}{O'A} \\ \Leftrightarrow \sin \angle AO'H &= \frac{1}{2} \\ \therefore \angle AO'H &= 30^\circ \quad (\because 0^\circ < \angle AO'H < 90^\circ) \end{aligned}$$

となる。よって，扇形 $AO'B$ の面積は，

$$\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{180^\circ - 30^\circ}{360^\circ} = \frac{5}{12}\pi$$

である。また， $\triangle AHO'$ の面積は，

$$\frac{1}{2} \cdot O'H \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

である。したがって，(3)の結果を用いて，

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-2}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right) dx - \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{11\sqrt{3}}{8} - \frac{5}{12}\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8}{3} + \frac{11\sqrt{3}}{8} - \frac{5}{12}\pi$